Тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену по математике 2011

Учебное пособие

Самара 2011

Государственное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования (повышения квалификации) специалистов
Самарский областной институт повышения квалификации и переподготовки работников образования

Тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену по математике 2011

Учебное пособие

Самара 2011

ББК 22.1
Т 66

Тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену по математике. /Составит. С.В.Богатырев, А.А.Максютин, Ю.Н.Неценко, Т.П.Шаповалова. — Самара: ГОУ СИПКРО, 2011 137с.

Рецензенты: Яковлева Г.И. — проректор СИПКРО по информатизации.
Клековкин Г.А. — зав. кафедрой математики и информатики СФ МГПУ, кандидат физико-математических наук, профессор МГПУ.

Учебное пособие предназначено для самостоятельной подготовки выпускников общеобразовательных школ к единому государственному экзамену по математике. Оно может быть использовано также для проведения репетиционных экзаменов в выпускных классах.

В пособии приведены 16 вариантов экзаменационной работы, составленной в соответствии со спецификацией экзаменационной работы ЕГЭ по математике 2011 года для выпускников XI классов общеобразовательных учреждений.

Кроме этого, в пособии приведено некоторое количество дополнительных задач по различным разделам ЕГЭ и три статьи по методам решения задач С1, С5 С

Печатается по решению редакционно-издательского совета Государственного образовательного учреждения дополнительного профессионального образования (повышения квалификации) Самарского областного института повышения квалификации и переподготовки работников образования

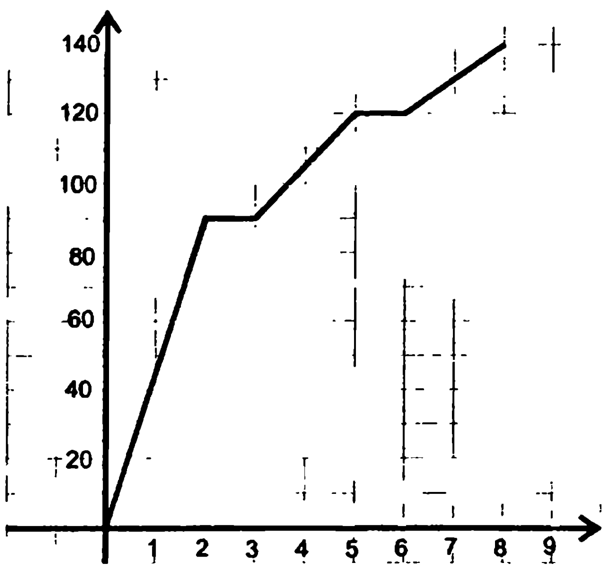
ISBN 978-5-7174-0420-4

Вариант №1

Часть 1

B1 Количество имеющегося кирпича составляет 80% от того, что требуется для строительства дома. На сколько процентов надо увеличить имеющееся количество кирпича, чтобы построить дом.

B2 Автобус двигается от города. На рисунке приводится изображение графика его движения. На горизонтальной оси откладывается время в часах, а на вертикальной - расстояние от города в километрах. Используя этот график найдите среднюю скорость движения автобуса до первой остановки.

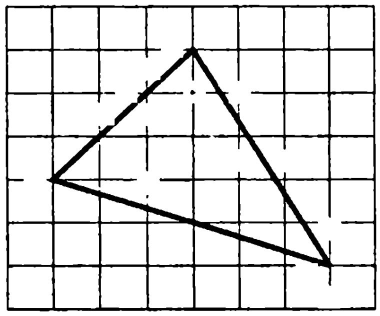


B3 Найдите корень уравнения $\sqrt{5-4x} = -x$. Если уравнение имеет несколько корней, укажите наибольший из них.

B4 В равнобедренном треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны 13, а тангенс угла B равен 3/4. Найдите высоту AK, проведенную к боковой стороне BC.

B5 Предпринимателю для поездки протяженностью 700 км и длительностью 3 суток требуется арендовать автомобиль. Ему было предложено три варианта (см. таблицу). Кроме аренды предприниматель должен оплатить топливо. Какой из этих вариантов самый дешевый? Стоимость

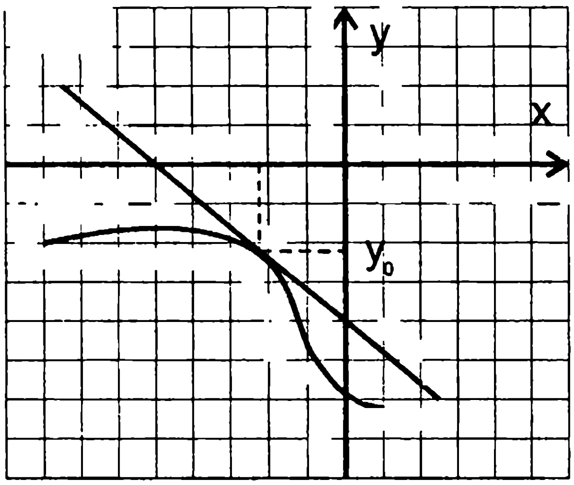
Фирма	Цена топлива (руб за 1 л)	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб за сутки)
А	19	13	3400
Б	21	10	3500
В	16	18	3200



B6 На клетчатой бумаге с размером клетки 1см х 1см изображен треугольник. Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

B7 Вычислите $81^{\log_3 5}$.

B8 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ на отрезке $[-8; 1]$ и касательная к нему в точке с ординатой y_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в этой точке. (Размер клетки 1×1).



B9 Площадь боковой поверхности цилиндра равна 45. Радиус основания этого цилиндра увеличили в 3 раза, а высоту в 2 раза уменьшили. Найдите площадь боковой поверхности нового цилиндра.

B10 Из отверстия в днище цилиндрического бака вытекает вода. Высота столба воды изменяется по закону $h(t) = \frac{1}{150}t^2 - \frac{2}{5}t + 6$. Высота $h(t)$ измеряется в метрах, а время t – в минутах. Найдите время, в течение которого вода будет вытекать из бака. Ответ приведите в часах.

B11 Дана функция $y = 2\sin x - \cos^2 x$. Найдите наибольшее значение этой функции на отрезке $[0; 2\pi]$.

B12 Путь от А до В в 90 км мотоциклист проехал с постоянной скоростью. Обратно из В в А он ехал со скоростью на 12 км/час больше, чем из А в В. В результате на путь из В в А он потратил на 15 минут меньше, чем из А в В. Найдите скорость мотоциклиста на обратном пути.

Часть 2

C1 Решить уравнение

$$\frac{10x^2 + 3\pi x - \pi^2}{\sqrt{2\cos x - 1}} = 0$$

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны a. Точки O и O_1 – центры оснований призмы, Точка M – середина отрезка OO_1. Найдите угол между плоскостями AMB и ABC.

C3 Решите неравенство $\log_{4x-x^2}(7x - 2x^2) \leqslant 1$.

C4 Дан треугольник ABC со сторонами $AC = 12$, $BC = 5$ и $AB = 13$. Вокруг этого треугольника описана окружность S. Точка D является серединой стороны AC. Построена окружность S_1, касающаяся окружности S в некоторой точке и отрезка AC в точке D. Найдите радиус окружности S_1.

C5 В линейной системе уравнений

$$\begin{cases} ax - y = 1 + a \\ 9x - ay = 3 - a \end{cases}$$

x и y являются неизвестными. Найдите все значения параметра a, при которых эта система имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $x \cdot y > 0$.

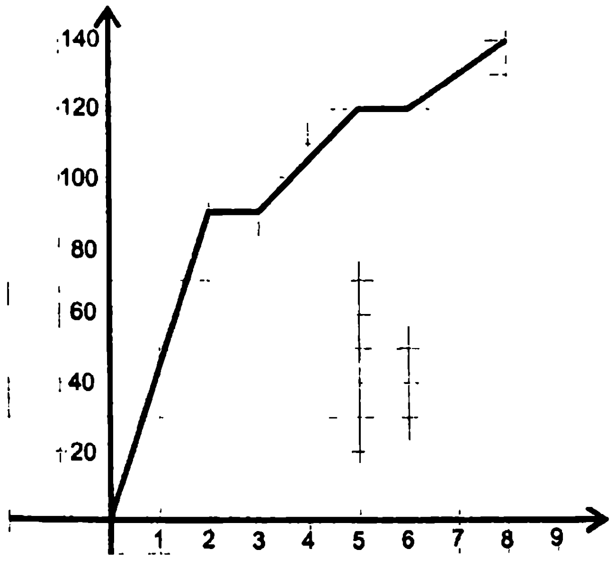
C6 В шахматном турнире участвовали учащиеся десятых и девятых классов. Десятиклассников было в 10 раз больше, чем девятиклассников и они набрали вместе в 4,5 раза больше очков, чем все девятиклассники. Сколько очков набрали девятиклассники, если каждый играл с каждым один раз?

Вариант №2

Часть 1

B1 Книга в переплете стоит 600 рублей. Известно, что книга без переплета стоит на 175% дороже переплета. Сколько стоит книга без переплета.

B2 Автобус двигается от города. На рисунке приводится изображение графика его движения. На горизонтальной оси откладывается время в часах, а на вертикальной - расстояние от города в километрах. Используя этот график найдите среднюю скорость движения автобуса до второй остановки.



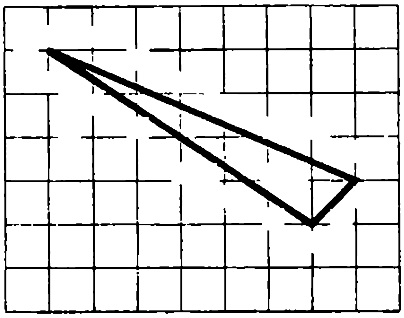
B3 Найдите корень уравнения $\sqrt{13-x} = x - 1$. Если уравнение имеет несколько корней, укажите наибольший из них.

B4 В равнобедренном треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны 13, а тангенс угла B равен 3/4. AK является высотой, проведенной из вершины A к боковой стороне BC. Найдите отрезок KC.

B5 Предпринимателю для поездки протяженностью 800 км и длительностью 2 суток требуется арендовать автомобиль. Ему было предложено три варианта (см. таблицу). Кроме аренды предприниматель должен оплатить топливо. Какой из этих вариантов самый дешевый? Стоимость укажите в рублях

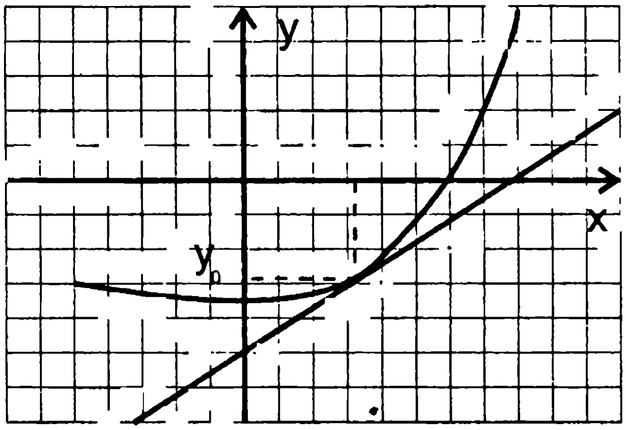
Фирма	Цена топлива (руб за 1 л)	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб за сутки)
А	18	12	3430
Б	22	11	3300
В	15	19	3150

B6 На клетчатой бумаге с размером клетки 1см х 1см изображен треугольник. Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



B7 Вычислите $\dfrac{\log_5 31}{\log_{25} 31}$.

B8 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ на отрезке $[-5; 8]$ и касательная к нему в точке с ординатой y_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в этой точке. (Размер клетки 1×1).



B9 Объем цилиндра равен 18. Найдите объем цилиндра, у которого радиус основания в 5 раз меньше, а высота в 2 раза больше, чем у данного цилиндра.

B10 Из отверстия в днище цилиндрического бака вытекает вода. Высота столба воды изменяется по закону $h(t) = \dfrac{1}{120}t^2 - \dfrac{3}{5}t + 10,8$. Высота $h(t)$ измеряется в метрах, а время t – в минутах. Найдите время, в течение которого вода будет вытекать из бака. Ответ приведите в часах.

B11 Дана функция $y = 2\sin x - \cos^2 x$. Найдите ее наименьшее значение функции на отрезке $[0; 2\pi]$.

B12 Автомобилист планировал приехать из города на дачу, расстояние между которыми равно 80 км, к определенному сроку. Однако из-за поломки машины он выехал из города на 20 минут позже. Чтобы приехать на дачу вовремя, он увеличил скорость на 20 км/час. С какой скоростью автомобилист ехал после ремонта машины?

Часть 2

C1 Решить уравнение

$$\frac{25x^2 - 5\pi x - 6\pi^2}{\sqrt{\sin x + \cos x}} = 0$$

C2 В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки O и O_1 – центры оснований призмы, точки P и K – середины ребер AB и AD соответственно, точка M – середина отрезка OO_1. Найдите угол между плоскостями PKM и ABC, если $AB = 3\sqrt{2}$, $AA_1 = 3\sqrt{3}$.

C3 Решите неравенство $\log_{-x^2+x+2}(-2x^2 + 4x) \leqslant 1$.

C4 Дан равнобедренный треугольник ABC со сторонами $AC = 12$, $AB = BC = \sqrt{117}$. Вокруг этого треугольника ABC описана окружность S. Точка D является серединой стороны AC. Построена окружность S_1, касающаяся окружности S в некоторой точке и отрезка AC в точке D. Найдите радиус окружности S_1.

C5 Найдите все значения параметра a при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ |x - 1| + |y + 1| = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение

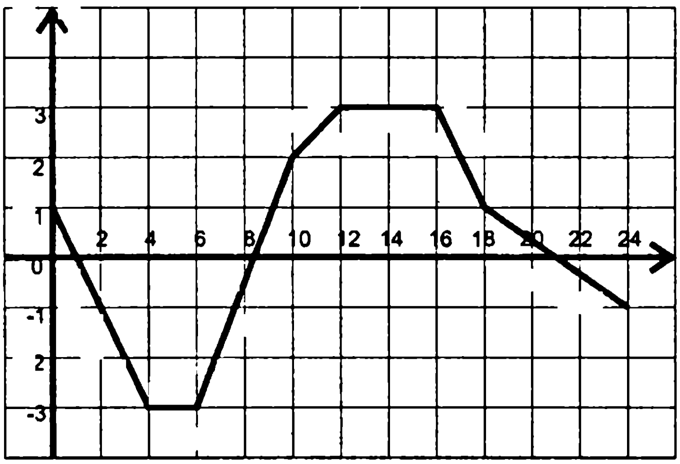
C6 Построены четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник, ... , n-угольник. Число диагоналей во всех построенных многоугольниках равно 800. Сколько построено многоугольников?

Вариант №3

Часть 1

B1 В фермерском хозяйстве имеется два поля Площадь первого поля равна 20 га, а площадь второго поля больше площади первого на 75%. За смену три трактора могут вспахать первое поле. Сколько потребуется таких тракторов, чтобы за смену вспахать второе поле? В ответе укажите наименьшее количество таких тракторов.

B2 На рисунке приведен график изменения температуры воздуха в течение суток. На горизонтальной оси откладывается время суток в часах. На вертикальной оси откладывается температура воздуха в градусах по Цельсию. Укажите количество часов, в течении которых температура воздуха не менялась.



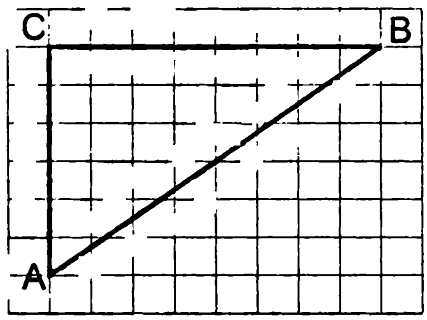
B3 Найдите корень уравнения $7^{x^2-3x} = 49^{x-3}$. Если уравнение имеет несколько корней, то в ответе укажите их сумму.

B4 В равнобедренном треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны 13. Высота AK, проведенная из вершины A к боковой стороне BC, равна 12. Найдите тангенс угла B.

B5 Семья из трех человек (2 взрослых, 1 ребенок) хочет поехать на курорт. Расстояние до курорта 900 км. Можно выбрать один из трех вариантов поездки: ехать на своей машине, ехать на автобусе, ехать на поезде. Расход бензина при поездке на своей машине составляет 13 литров на

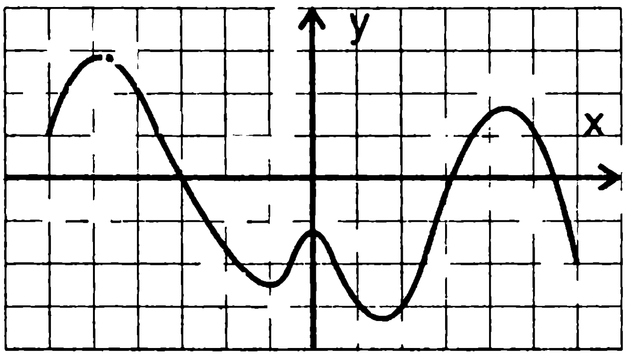
100 км пути при цене 21 рубль за 1 литр. Билет на автобус стоит 830 рублей на человека. Билет на поезд стоит 950 рублей для взрослого. Билет на поезд для ребенка стоит на 20% дешевле, чем билет для взрослого. Какой из этих вариантов поездки самый дешевый? Укажите стоимость самой дешевой поездки в рублях.

B6 На клетчатой бумаге с размером клетки 1см х 1см изображен треугольник ABC. Найдите длину высоты (в сантиметрах), опущенной из вершины C на сторону AB.



B7 Вычислите $\log_5 7 \cdot \log_7 125$.

B8 На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[-6; 6]$. Укажите точку экстремума этой функции $y = f(x)$ на отрезке $[-5; 1]$.



B9 Объем конуса равен 21. Найдите объем конуса, у которого радиус основания в 1,5 раз больше, а высота в 3 раза меньше, чем у данного конуса.

B10 Из отверстия в днище цилиндрического бака вытекает вода. Высота столба воды изменяется по закону $h(t) = \frac{1}{200}t^2 - \frac{4}{5}t + 35$. Высота $h(t)$ измеряется в метрах, а время t – в минутах. Найдите время, в течение которого высота столба воды в баке не будет превышать 3 м. Ответ приведите в секундах.

B11 Дана функция $y = 10 - 3\sin x + \sin 3x$. Найдите наибольшее значение этой функции на отрезке $[0; 2\pi]$.

B12 Из городов А и В навстречу друг другу выехали два автомобиля и встретились через 5 часов. Если бы скорость автомобиля, выехавшего из А увеличилась на 20%, а скорость автомобиля, выехавшего из В увеличилась на 40%, то их встреча произошла бы через $3\frac{19}{27}$ часа. Во сколько раз скорость автомобиля, выехавшего из А, меньше скорости автомобиля, выехавшего из В.

Часть 2

C1 Решить уравнение

$$\frac{35x^2 + 26\pi x + 3\pi^2}{\sqrt{\sin 2x + \cos x}} = 0$$

C2 Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $PABC$ равна 4; точка K – середина ребра PC. Найдите угол между плоскостями ABK и ABC, если площадь треугольника ABK равна $\frac{16}{3}$.

C3 Решите неравенство $\log_{|x+3|}(2 + 4x + x^2) \leqslant 2$.

C4 Дана окружность S с центром в точке O радиуса 5. Луч, выходящий из центра O пересекает эту окружность в точке P. На этом луче выбирается точка A на расстоянии 3 от окружности S. Найдите радиус окружности, которая касается луча OA в точке A и окружности S.

C5 Найдите все значения параметра a, при которых графики функций $y = 2|x| + |x - 3|$ и $y = 2|x - 1| + x + a$ пересекаются и точка пересечения единственна.

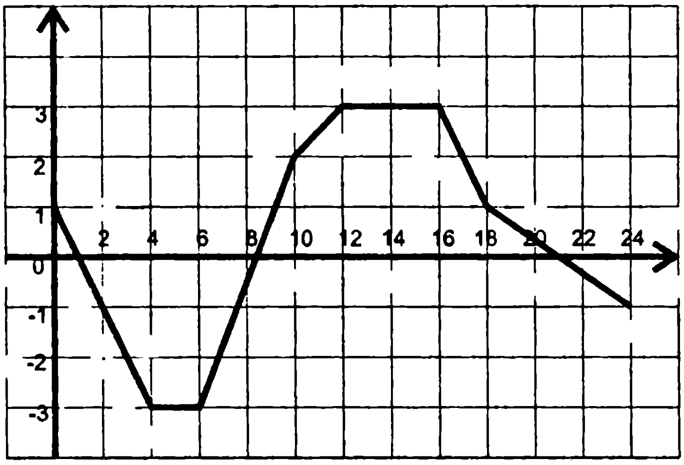
C6 Просуммированы все натуральные числа, не превосходящие 1000 и имеющие нечетное число делителей. Чему равна полученная сумма?

Вариант №4

Часть 1

B1 Первому сварщику для выполнения заказа требуется 28 часов, а второму – на 25% меньше, чем первому. Укажите количество часов, которое потребуется для выполнения этого заказа при их совместной работе.

B2 На рисунке приведен график изменения температуры воздуха в течение суток. На горизонтальной оси откладывается время суток в часах. На вертикальной оси откладывается температура воздуха в градусах по Цельсию. Найдите количество часов, в течении которых температура воздуха понижалась.

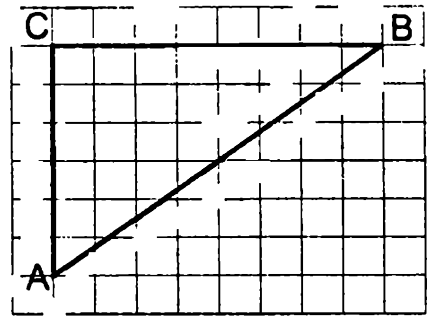


B3 Найдите корень уравнения $5^{x^2-4x} = 125^{x-2}$. Если уравнение имеет несколько корней, то в ответе укажите их произведение.

B4 В равнобедренном треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны 13. Высота AK проведена из вершины A к боковой стороне BC. Отрезок KC равен 8. Найдите тангенс угла B.

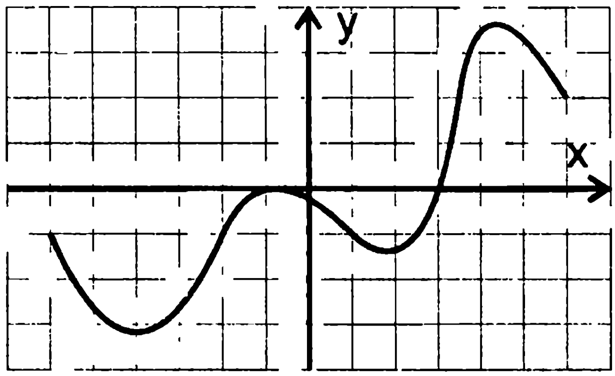
B5 От города до загородного дома ведут три разные дороги. Первая дорога состоит из двух частей: 20 км асфальта и 15 км грунтовки. Вторая дорога длиной 48 км полностью асфальтирована. Третья дорога имеет длину 27 км и является полностью грунтованной. Средняя скорость машины при езде по асфальтированной дороге равна 80 км/час, а при езде по грунтованной дороге – 40 км/час. По какой дороге надо поехать, чтобы время поездки было наибольшим? В ответе укажите наибольшее время поездки в часах.

B6 На клетчатой бумаге с размером клетки 1см х 1см изображен треугольник. Найдите длину радиуса окружности (в сантиметрах), описанного вокруг этого треугольника.



B7 Найдите значение выражения $\log_2(\log_3 81)$.

B8 На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[-6; 6]$. Укажите точку экстремума этой функции $y = f(x)$ на отрезке $[1; 5]$.



B9 Объем правильной треугольной пирамиды равен 2. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания в 1,5 раза больше, а высота в 5 раз больше, чем у данной пирамиды.

B10 Из отверстия в днище цилиндрического бака вытекает вода. Высота столба воды изменяется по закону $h(t) = \frac{1}{30}t^2 - \frac{7}{5}t + 20,7$. Высота $h(t)$ измеряется в метрах, а время t – в минутах. Найдите время, в течение которого высота столба воды в баке не будет превышать 6 м. Ответ приведите в часах.

B11 Дана функция $y = 10 - 3\sin x + \sin 3x$. Найдите наименьшее значение этой функции на отрезке $[0; 2\pi]$

B12 Из городов А и В навстречу друг другу выехали два автомобиля и встретились через 4 часа. Если бы скорость автомобиля, выехавшего из А уменьшилась на 10%, а скорость автомобиля, выехавшего из В уменьшилась на 20%, то их встреча произошла бы через $4\frac{16}{21}$ часа. Во сколько раз первоначальная скорость автомобиля, выехавшего из В, больше первоначальной скорости автомобиля, выехавшего из А.

Часть 2

C1 Решить уравнение

$$\frac{25x^2 - 4\pi^2}{\sqrt{\sin x + \operatorname{tg} x}} = 0$$

C2 В треугольной пирамиде $PABC$ ребро PC перпендикулярно плоскости основания ABC. Основание ABC является правильным треугольником со стороной 6, ребро PB равно $3\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостями PAB и ABC.

C3 Решите неравенство $\log_{|x-2|}(4 + 4x - 2x^2) \leqslant 2$.

C4 Дана окружность S_1 радиуса 5. Из точки A к этой окружности проведена касательная AB (B - точка касания). Длина отрезка AB равна 3. Вторая окружность S_2 проведена так, что она касается прямой AB в точке A и окружности S_1 в некоторой точке. Найдите радиус второй окружности S_2.

C5 Найдите наименьшее значение функции $a = x + y$ при условии, что $y \geqslant \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} + x$.

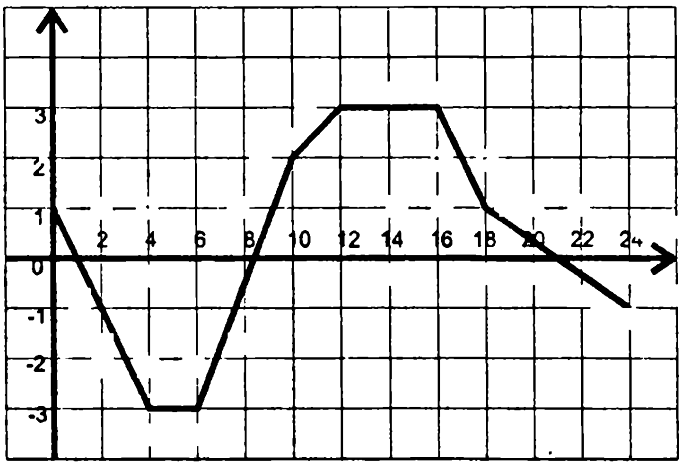
C6 Для нумерации страниц книги потребовалось 2322 цифры. Страницы нумеруются с первой до последней. Сколько страниц в книге?

Вариант №5

Часть 1

B1 Стоимость футболки после двух повышений на одно и то же число процентов изменилось с 500 рублей до 720 рублей. На сколько процентов повышалась цена футболки каждый раз?

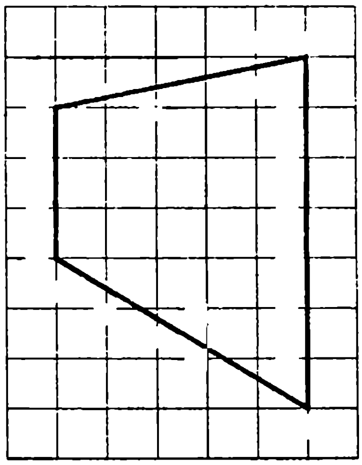
B2 На рисунке приведен график изменения температуры воздуха в течение суток. На горизонтальной оси откладывается время суток в часах. На вертикальной оси откладывается температура воздуха в градусах по Цельсию. Найдите количество часов, в течении которых температура воздуха не возрастала.



B3 Найдите корень уравнения $\log_2(5-3x)=5$.

B4 В треугольнике ABC угол C равен 90°, CK является высотой, проведенной к стороне AB. Найдите AK, если $AB=10$ и $\sin A=3/4$.

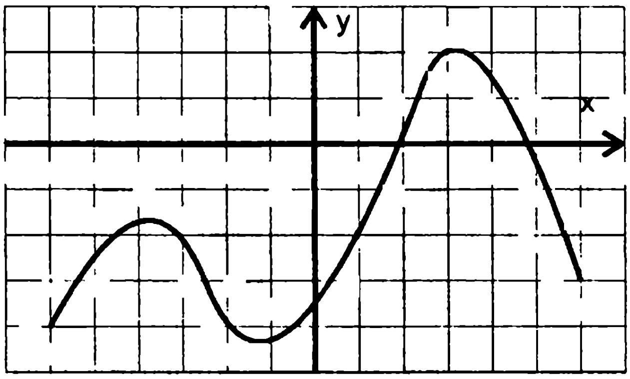
B5 Для загрузки танкера нефтью, вместимость которого равна 15000 тонн, имеются четыре трубопровода. По первому из них в час можно закачать 300 тонн нефти, по второму – 350 тонн, по третьему – 400 тонн, по четвертому – 450 тонн. Загрузка танкера может идти одновременно только по трем трубопроводам. Найдите минимальное время. необходимое для загрузки танкера. Ответ укажите в часах.



B6 На клетчатой бумаге с размером клетки 1см x 1см изображена трапеция. Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

B7 Найдите значение выражения $0,04^{-1,5}$.

B8 На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[-6; 6]$. Укажите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2x + 1$, или совпадает с ней.



B9 В цилиндр, объем которого равен $\pi\sqrt{3}$, вписана правильная треугольная призма. Найдите объем этой призмы.

B10 Зависимость мощности тока P от силы тока J выражается формулой $P = -3J^2 + 13,2J$ (J измеряется в амперах, а P измеряется в ваттах). Чему равна максимальная мощность тока?

B11 Дана функция $y = e^{x+4} \cdot (x^2 - 8)$. Найдите ее точку минимума.

B12 Двое рабочих выполнили вместе некоторую работу за 6 дней. Если бы сначала первый рабочий выполнил третью часть работы, а потом второй рабочий выполнил бы оставшуюся часть работы, то вся работа была бы выполнена за $13\frac{1}{3}$ дня. За какое время первый рабочий мог бы в одиночку выполнить всю работу, если известно, что его производительность труда выше, чем производительность труда второго рабочего.

Часть 2

C1 Решить уравнение

$$\frac{10\sin^2 x - 3\sin x - 4}{(5\cos x - 3)\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0$$

C2 Ребро MD пирамиды $MABCD$ перпендикулярно плоскости основания $ABCD$. Основание $ABCD$ является ромбом с диагоналями $AC = 16$ и $BD = 12$. Найдите угол между плоскостями ABC и MBC, если $MD = 6,4$.

C3 Решите неравенство $\log_{|x+2|}(2|x-5|-5) \geqslant 1$.

C4 Окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом. К ним проведена внешняя касательная. Найдите радиус окружности, касающейся окружностей S_1 и S_2 и их внешней касательной, если радиусы окружностей S_1 и S_2 равны соответственно 12 и 3.

C5 Найдите все значения параметра a, при которых графики двух функций $y = x^2 + 5x + |3x + 15|$ и $y = a$ пересекаются в двух точках.

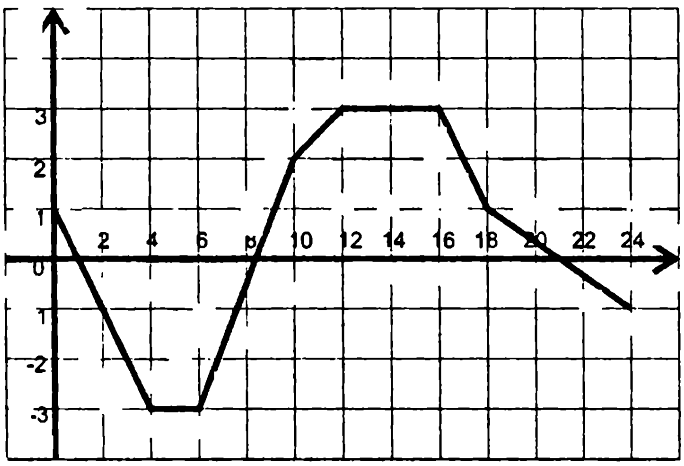
C6 Для нумерации книги с первой страницы до последней потребовалось в n раз больше цифр, чем страниц в книге. Сколько страниц в книге? (n – целое положительное число).

Вариант №6

Часть 1

$\boxed{\mathbf{B1}}$ Масса автомобиля «Волга» без пассажиров составляет 1280 кг, а с пассажирами $1768,96$ кг. На сколько процентов масса автомобиля с пассажирами больше, чем масса автомобиля без пассажиров?

$\boxed{\mathbf{B2}}$ На рисунке приведен график изменения температуры воздуха в течение суток. На горизонтальной оси откладывается время суток в часах. На вертикальной оси откладывается температура воздуха в градусах по Цельсию. Найдите количество часов, в течении которых температура воздуха не убывала.

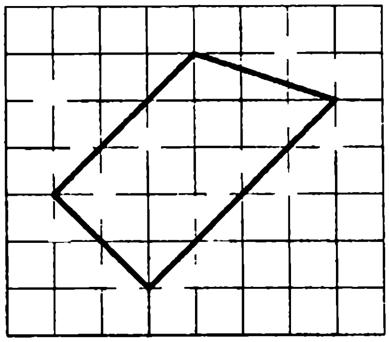


$\boxed{\mathbf{B3}}$ Найдите корень уравнения $\log_3(4-3x) = 2\log_3 4$.

$\boxed{\mathbf{B4}}$ В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CK является высотой, проведенной к стороне AB. Найдите CK, если $AB = 2\sqrt{7}$ и $\sin A = 3/4$.

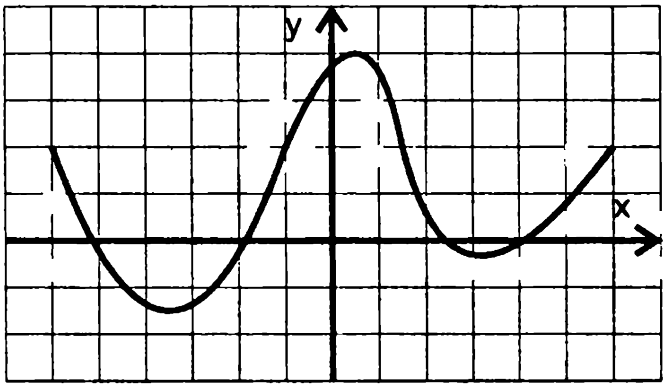
$\boxed{\mathbf{B5}}$ Для загрузки танкера нефтью, вместимость котого равна 17400 тонн, имеются четыре трубопровода. По первому из них в час можно закачать 300 тонн нефти, по второму – 350 тонн, по третьему – 400 тонн, по четвертому – 450 тонн. Загрузка танкера может идти одновременно только по трем трубопроводам. Найдите минимальное время, необходимое для загрузки танкера. Ответ укажите в часах.

B6 На клетчатой бумаге с размером клетки 1см х 1см изображена трапеция. Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.



B7 Найдите значение выражения $0,125^{-2/3}$.

B8 На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[-6; 6]$. Укажите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 4$, или совпадает с ней.



B9 В цилиндр вписана правильная треугольная призма, объем которой равен $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$. Найдите объем цилиндра.

B10 Высота над землей подброшенного вверх камня меняется по закону $h(t) = -5t^2 + 4,2t + 2,8$, где время t измеряется в секундах, а высота $h(t)$ – в метрах. Чему равна максимальная высота камня над землей?

B11 Дана функция $y = e^{x+4} \cdot (x^2 - 8)$. Найдите точку максимума этой функции.

B12 Двое рабочих выполнили вместе некоторую работу за 5 дней. Если бы сначала первый рабочий выполнил четвертую часть работы, а потом второй рабочий выполнил бы оставшуюся часть работы, то вся работа была бы выполнена за 10 дней. За какое время первый рабочий мог бы в одиночку выполнить всю работу, если известно, что его производительность труда ниже, чем производительность труда второго рабочего.

Часть 2

C1 Решите уравнение

$$\frac{\sin 2x + \cos^2 x}{\sqrt{2\sin x + 1}} = 0$$

C2 Основанием правильной пирамиды $DABC$ является треугольник ABC со стороной. равной $a\sqrt{3}$. Ребро DB образует угол 45° с основанием ABC. Найдите угол между плоскостями ABC и ABD.

C3 Решите неравенство $\log_{|x+2|}(3|x+1|-5) \geqslant 1$.

C4 Две окружности S_1 и S_2 соответственно радиусов 12 и 3 касаются друг друга внешним образом. К этим двум окружностям проведены две внешние касательные, которые образуют угол α. В этот угол α вписана третья окружность, которая касается одной из окружностей S_1, или S_2, но не касается другой. Найдите радиус этой третьей окружности.

C5 При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x + y^2 + a = 0 \\ x^2 - y + a = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

C6 Существуют ли натуральные решения уравнения

$$x^{2012} + y^{2012} = 2013$$

Вариант №7

Часть 1

B1 По течению реки теплоход плыл в течении 2 часов, а против течения реки – в течении 3 часов. Собственная скорость теплохода – 20 км/час, а скорость течения реки составляет 12% от собственной скорости теплохода. На сколько километров больше проплыл теплоход против течения реки, чем по течению реки?

B2 На рисунке показан график изменения атмосферного давления с 3-его июля по 29-ое июля. На горизонтальной оси откладываются числа месяца июля, а на вертикальной – величину атмосферного давления в мм. ртутного столбца. Найдите разность между самым высоким и самым низким значениями давлениями в указанном промежутке времени.

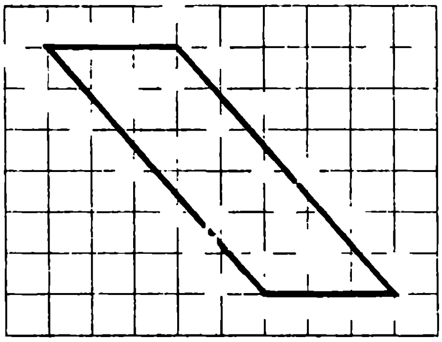
B3 Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sin\frac{\pi(2x+1)}{3}=0.$$

B4 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CK является высотой, проведенной к стороне AB. Найдите AK, если $AB = 10$ и $\operatorname{tg} A = 1/2$.

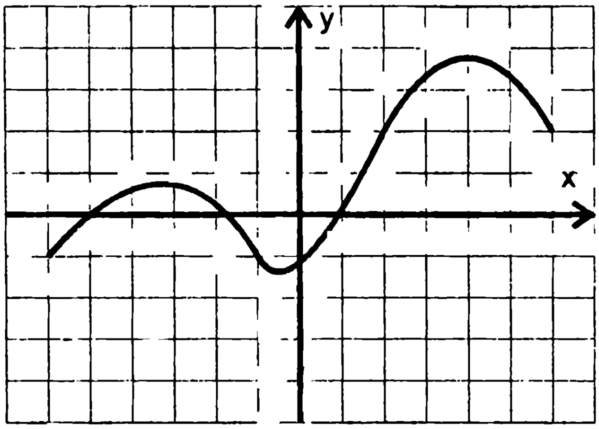
B5 Клиенту для покупки квартиры в новостройке не хватает 1,8 миллиона рублей. Он может взять ипотечный кредит в двух разных банках: в первом банке – на 10 лет со ставкой 13% годовых, или во втором банке – на 15 лет со ставкой 9% годовых. В каком варианте кредита переплата за квартиру будет наименьшей? В ответе укажите эту наименьшую сумму переплаты в млн. рублей.

B6 На клетчатой бумаге с размером клетки 1см x 1см изображен параллелограмм. Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



B7 Найдите значение выражения $\left(64^{\frac{1}{18}}\right)^{-3}$

B8 На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[-6; 6]$. В какой точке отрезка $[2; 4]$ функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение.



B9 В конус, объем которого равен 5π, вписана правильная четырехугольная пирамида. Найдите объем пирамиды.

B10 Для вычисления тормозного пути автомашины используют формулы $S = 18t - \frac{3}{2}t^2$, где S – длина тормозного пути в метрах, t – время тормозного пути в секундах. Определите наименьшее время, прошедшее с начала торможения, если за это время автомашина проехала не менее 48 метров.

B11 Дана функция $y = \ln(9x + 10) - 9x$. Найдите ее точку максимума.

B12 Два насоса разной мощности, работая вместе, наполняют бассейн водой за 6 часов. Если производительность первого насоса увеличить на 20%, а второго – уменьшить на 20%, то при совместной работе они будут наполнять бассейн за $6\frac{2}{3}$ часа. За сколько часов может наполнить бассейн один первый насос после увеличения его мощности.

Часть 2

C1 Решите уравнение

$$\frac{2\sin 2x + 1}{\sqrt{\sin x - \cos x}} = 0$$

C2 Основанием правильной пирамиды $PABC$ является треугольник со стороной, равной 8. Точка K лежит на ребре PC. Плоскость ABK перпендикулярна ребру PC, площадь треугольника ABK равна 24. Найдите угол между плоскостями ABK и ABC.

C3 Решите неравенство $\log_{(x-3)^2}\left(\dfrac{x+5}{|x-4|}\right) < \dfrac{1}{2}$.

C4 Дан треугольник с периметром 30. В этот треугольник вписана окружность. К окружности проведена касательная параллельно основанию треугольника. Отрезок касательной, образованный точками пересечения этой касательной с боковыми сторонами треугольника, равен 3,6. Найдите основание треугольника.

C5 Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 31 \leqslant 8\left(|x| + |y|\right), \\ x^2 + y^2 - 2y = a^2 - 1; \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

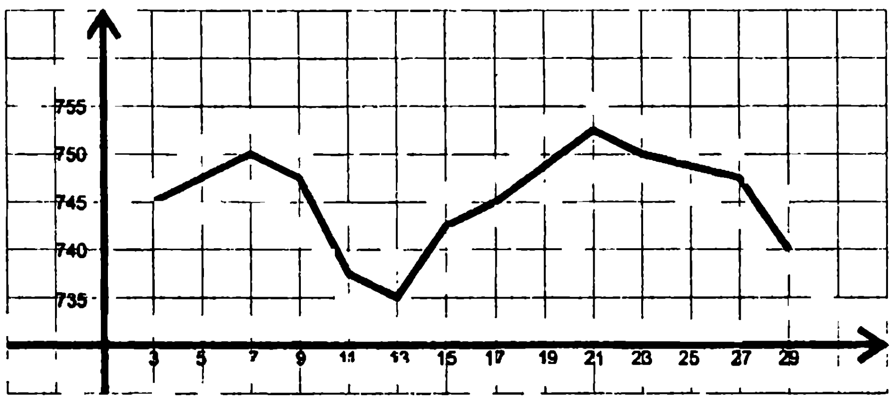
C6 Пятизначные числа x и y обладают тем свойством, что десятизначное число, полученное в результате приписывания справа от x числа y, делится на произведение x на y. Найдите все пары таких чисел x и y.

Вариант №8

Часть 1

B1 Рабочий выполняет некоторую работу за 5 часов. На сколько процентов он должен увеличить производительность своего труда, чтобы ту же самую работу выполнить за 4 часа?

B2 На рисунке показан график изменения атмосферного давления с 3-его июля по 29-ое июля. На горизонтальной оси откладываются числа месяца июля, а на вертикальной – величину атмосферного давления в мм. ртутного столбца. Найдите количество дней, в течение которых давление возрастало.



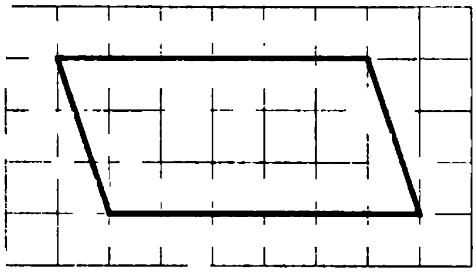
B3 Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\cos\frac{\pi(2x-3)}{4} = 0.$$

B4 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CK является высотой, проведенной к стороне AB. Найдите CK, если $AB = 10$ и $\operatorname{tg} A = 1/2$.

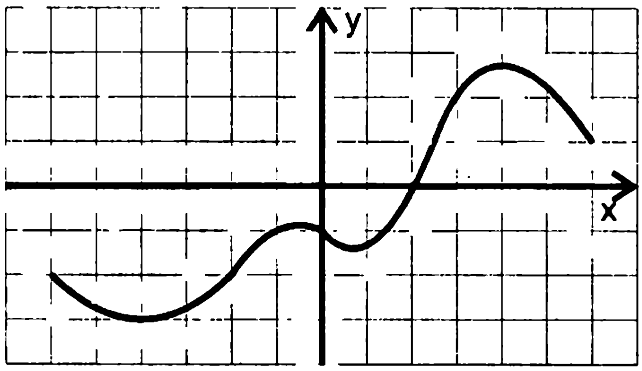
B5 Клиенту для покупки квартиры в новостройке не хватает 1,6 миллиона рублей. Он может взять ипотечный кредит в двух разных банках: в первом банке – на 10 лет со ставкой 14% годовых, или во втором банке – на 12 лет со ставкой 12% годовых. В каком варианте кредита переплата за квартиру будет наименьшей? В ответе укажите эту наименьшую сумму переплаты в млн. рублей.

B6 На клетчатой бумаге с размером клетки 1см x 1см изображен параллелограмм. Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



B7 Найдите значение выражения $\left(625^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

B8 На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[-6;6]$. В какой точке отрезка $[-2;2]$ функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение.



B9 В конус вписана правильная четырехугольная пирамида, объем которой равен $\frac{18}{\pi}$. Найдите объем конуса.

B10 Для вычисления тормозного пути автомашины используют формулы $S = 21t - \frac{5}{2}t^2$, где S – длина тормозного пути в метрах, t – время тормозного пути в секундах. Определите наименьшее время, прошедшее с начала торможения, если за это время автомашина проехала не менее 40,5 метров.

B11 Дана функция $y = 10x - \ln(10x + 11)$. Найдите точку минимума этой функции.

B12 Для заполнения бассейна водой имеются три насоса. Второму насосу для наполнения бассейна требуется времени в 2 раза меньше, чем первому, и на 4 часа меньше, чем третьему. Три насоса, работая вместе, наполняют бассейн за 2 часа. Определите минимальное время (в минутах) за которое два одновременно работающих насоса заполняют бассейн.

Часть 2

C1 Решите уравнение

$$\frac{2\sin^2 x - 1}{\sqrt{\sin 2x + \cos 2x}} = 0$$

C2 В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ высота SO вдвое больше стороны основания $ABCD$. Найдите расстояние между прямыми AB и SC, если сторона основания пирамиды равна 17.

C3 Решите неравенство $\log_{(x-1)^2}\left(\frac{5-x}{|x+1|}\right) < \frac{1}{2}$.

C4 В трапецию $ABCD$ можно вписать окружность. Большим основанием трапеции является отрезок AD, а меньшее основание трапеции BC равно 2,5. Продолжения боковых сторон трапеции пересекаются в точке M. Периметр треугольника AMD равен 40. Найдите длину большего основания трапеции.

C5 Найдите наименьшее значение параметра a, при котором система

$$\begin{cases} |3x + 4y + 1| + |3x - 4y - 1| = 9 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет решение.

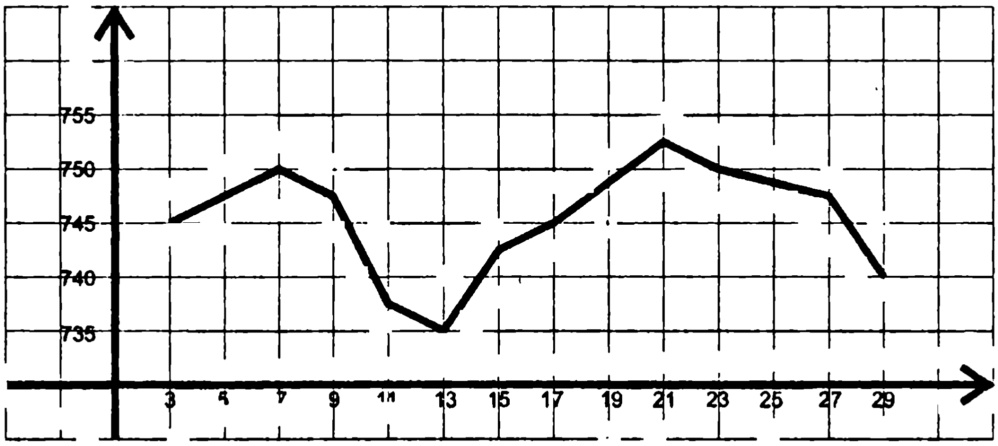
C6 В шахматном турнире участвовали два ученика седьмых классов и несколько учеников восьмых классов. Два семиклассника набрали 8 очков, а каждый из восьмиклассников набрал одинаковое количество очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире, если каждый играл с каждым один раз?

Вариант №9

Часть 1

B1 При повышении цены билетов на 29% число зрителей в театре уменьшилось на 23%. На сколько процентов уменьшилась выручка театра?

B2 На рисунке показан график изменения атмосферного давления с 3-его июля по 29-ое июля. На горизонтальной оси откладываются числа месяца июля, а на вертикальной величину атмосферного давления в мм. ртутного столба. Найдите количество дней, в течение которых давление убывало.



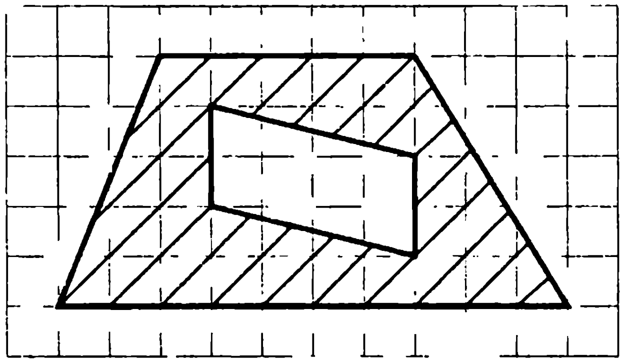
B3 Решите уравнение $2x - 3\sqrt{x} - 2 = 0$. Если уравнение имеет несколько корней, то в ответе укажите наименьший из них.

B4 В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания $AD = 14$, $BC = 8$, высота $BK = 4$. Найдите синус угла D.

B5 Для перевозки 500 т картофеля на 250 км фермер может воспользоваться услугами одной из трех фирм. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждой фирмы указана в таблице. Сколько рублей придется заплатить фермеру за перевозку картофеля в самом дешевом варианте?

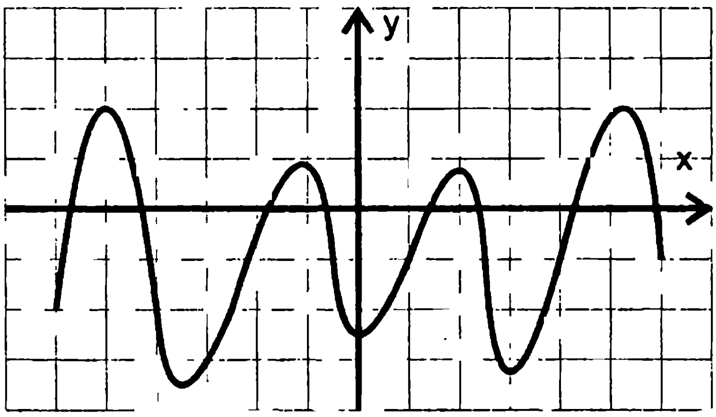
Фирма	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъемность автомобиля в тоннах
А	3100	3
Б	3500	3,5
В	4100	4

B6 Найдите площадь заштрихованной фигуры в квадратных сантиметрах, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки 1см x 1см.



B7 Найдите значение выражения $\dfrac{\cos^2 14^\circ - \sin^2 14^\circ}{2\sin 118^\circ}$.

B8 На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[-6; 6]$. Найдите количество точек минимума функции $y = f(x)$ на отрезке $[-5; 5]$.



B9 Одно из ребер прямоугольного параллелепипеда в 2 раза больше ребра куба, второе – в 3 раза меньше ребра куба, а третье – составляет 0,75 ребра куба. Найдите объем этого прямоугольного параллелепипеда, если объем куба равен 21.

B10 По закону Ома сила тока J в цепи вычисляется по формуле $J = \frac{U}{R}$. где напряжение U измеряется в вольтах, сопротивление прибора R измеряется в омах, а сила тока J – в амперах. Каким должно быть минимальное сопротивление прибора для того, чтобы сеть работала, если прибор включен в розетку с напряжением 220 вольт, а предохранитель в сети плавится при силе тока выше 16 ампер?

B11 Найдите наименьшее значение функции $y = ex^2 \ln(x)$.

B12 Имеются два слитка. Масса первого слитка в 2 раза больше массы второго. В первом слитке содержится 30% серебра, а во втором – 42% серебра. Сколько процентов серебра содержится в сплаве, полученном из этих слитков?

Часть 2

C1 Решите уравнение $\sqrt{2 + \cos x} = \sqrt{2}\sin x$.

C2 В основании пирамиды $MABC$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($AC{=}BC{=}4$). Ребра MA, MB и MC равны 8. Найдите расстояние между прямыми AB и CM.

C3 Решите неравенство $\log_{x+2}(x^3 - x^2 - 3x) \leqslant 2$.

C4 В квадрат со стороной 4 вписана окружность S. В один из углов этого квадрата вписана окружность так, что она касается S (но не совпадает с S). Найдите радиус этой второй окружности.

C5 Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x-1| + |x+1| \\ y = ax + 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

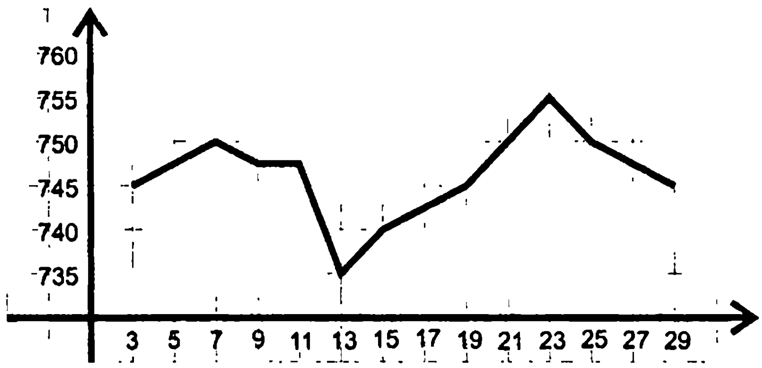
C6 Два двузначных числа, записанных одно за другим, образуют четырехзначное число, которое делится на их произведение. Найдите эти числа.

Вариант №10

Часть 1

B1 Костюм «тройка» состоит из пиджака, брюк и жилета. Пиджак дороже брюк на 26%, и дороже жилета - на 60%. На сколько процентов жилет дешевле брюк?

B2 На рисунке показан график изменения атмосферного давления с 3-его июля по 29-ое июля. На горизонтальной оси откладываются числа месяца июля, а на вертикальной – величину атмосферного давления в мм. ртутного столбца. Найдите количество дней, в течение которых давление не превосходило 747,5 мм ртутного столба.



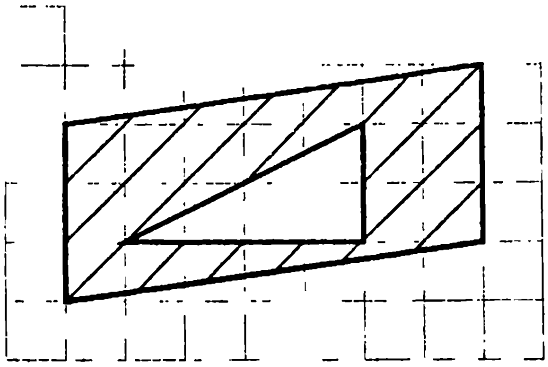
B3 Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{2x-7}=-2$.

B4 В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания $AD = 14$, $BC = 8$, высота $BK = 4$. Найдите косинус угла D.

B5 Для перевозки 60 т лука на 300 км фермер может воспользоваться услугами одной из трех фирм. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждой фирмы указана в таблице. Сколько рублей пришлось бы заплатить фермеру за перевозку лука в самом дорогом варианте?

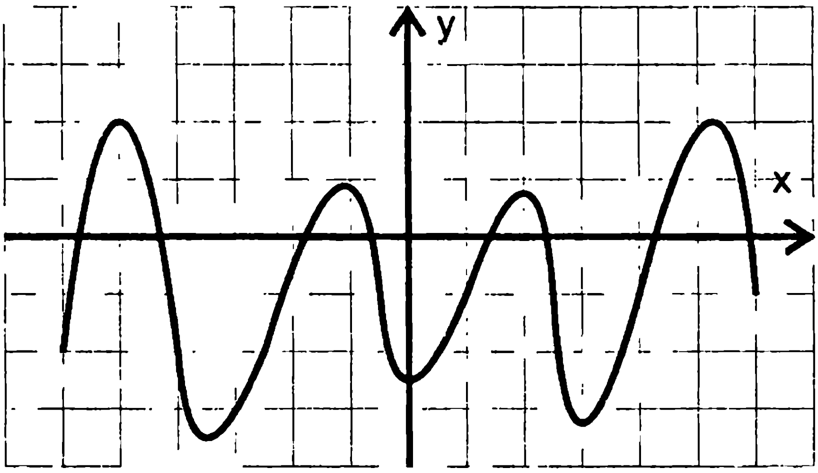
Фирма	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъемность автомобиля в тоннах
А	3800	4
Б	4200	4,5
В	4700	5

B6 Найдите площадь заштрихованной фигуры в квадратных сантиметрах, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки 1см х 1см.



B7 Найдите значение выражения $\dfrac{\sin^2 18^\circ - \cos^2 18^\circ}{\sin 234^\circ}$.

B8 На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[-6; 6]$. Найдите количество точек максимума функции $y = f(x)$ на отрезке $[-5; 2]$.



B9 Ребро куба в 3 раза больше первого измерения прямоугольного параллелепипеда, в 4 раза меньше второго измерения и составляет 0,4 третьего измерения параллелепипеда. Найдите объем куба, если объем параллелепипеда равен 17.

B10 По закону Ома для полной цепи сила тока J в цепи вычисляется по формуле $J = \frac{E}{R+r}$, где ЭДС источника тока E измеряется в вольтах, $r = 3$ ом – внутреннее сопротивление источника тока, сопротивление цепи R измеряется в омах, а сила тока J – в амперах. Сила тока короткого замыкания вычисляется по формуле $J_0 = \frac{E}{r}$. Каким должно быть минимальное сопротивление цепи R для того, чтобы сила тока в цепи составляла не более 15% от силы тока короткого замыкания.

B11 Найдите наименьшее значение функции $y = ex^4 \ln(x$

B12 Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 20 кг, содержащий 55% меди. Сколько килограммов чистого олова надо прибавить к этому куску сплава, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди.

Часть 2

C1 Решите уравнение $\sqrt{5 - 2\sin x} = 6\sin x - 1$.

C2 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите расстояние от ребра AB до диагонали A_1C куба.

C3 Решите неравенство $\log_x(x^3 - 2x^2 - 2x + 4) \leqslant 2$.

C4 Дан ромб со стороной a и одним из углов в 60°. В этот ромб вписана окружность S. В угол ромба, равный 60°, вписаны окружность так, что она касается окружности S. Найдите радиус этой окружности.

C5 Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_a(x^2 + y - 1) = x^2 - 3 \\ 2x^2 + y = 4 \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

C6 Числа a и b обладают следующими свойствами: 1) a – простое число; 2) b вдвое больше a; 3) обращенные a и b (т.е.записанные теми же цифрами, но в обратном порядке, обладают следующим свойством: они являются степенью двойки, причем после зачеркивания первой цифры слева в их десятичной записи снова получается десятичная запись чисел, являющихся степенью двойки. Найдите все такие a и b.

Вариант №11

Часть 1

B1 С нефтебазы надо вывезти 353,9 тонн бензина. Для этого можно использовать бензовозы грузоподъемностью 3 тонны или 4 тонны На сколько больше для перевозки всего бензина потребуется трехтонных, чем четырехтонных бензовозов.

B2 На рисунке показан график изменения атмосферного давления с 3-его июля по 29-ое июля. На горизонтальной оси откладываются числа месяца июля, а на вертикальной величину атмосферного давления в мм. ртутного столбца. Найдите количество дней, в течении которых давление было не ниже 747,5 мм ртутного столба.

B3 Найдите корень уравнения $14^{2x-3} = \frac{1}{196}$.

B4 В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания $AD = 5$, $BC = 3$, $\cos A = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Найдите BD.

B5 Застройщику требуется приобрести 150 листов шифера. Он может купить шифер у одного из трех поставщиков Цена шифера и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

Фирма	Стоимость шифера (руб. за лист)	Стоимость доставки (в рублях)	Дополнительные условия
А	250	5100	
Б	270	3800	Доставка со скидкой 50% при заказе больше 42000 руб.
В	290	2000	Бесплатная доставка при заказе больше 45000 руб.

B6 Длина окружности равна 5. Найдите значение выражения $\pi \cdot S$, где S – площадь круга.

B7 Найдите значение выражения $\dfrac{32\sin 81^\circ \cdot \cos 81^\circ}{\sin 18^\circ}$.

B8 Прямая $y = x + 1$ параллельна касательной к графику функции $y = 3x^2 + 4x - 1$. Найдите абсциссу точки касания.

B9 В правильную треугольную призму вписан в цилиндр, объем которого равен $\pi\sqrt{3}$. Найдите объем призмы.

B10 Изменение массы радиактивного вещества происходит по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T}$, где $m(t)$ – масса вещества в момент времени t в граммах, m_0 – масса вещества в начальный момент времени, T – период полураспада в минутах. К началу радиактивного распада имелось 5 грамм вещества. Через какое количество времени (в минутах) останется 0,625 грамм радиоактивного вещества, если его период полураспада равен 4 минуты.

B11 Дана функция $y = 2x - 2\ln(x + 11) + 3$. Найдите ее наименьшее значение.

B12 Смешали 50%-ный раствор кислоты с 10%-ным раствором кислоты и получили 800 грамм 20%-ного раствора кислоты. Сколько граммов 10%-ного раствора кислоты было взято?

Часть 2

$\boxed{\text{C1}}$ Решите уравнение $\sqrt{2+\cos 2x-\sin 2x}=-\sqrt{6}\cos x$.

$\boxed{\text{C2}}$ Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 6. Найдите расстояние от ребра DC до диагонали D_1B куба.

$\boxed{\text{C3}}$ Решите неравенство $\log_x \log_3(2\cdot 9^x-5\cdot 3^x+4)\geqslant 1$.

$\boxed{\text{C4}}$ Две окружности S_1 и S_2 радиусов 2 и 1 соответственно касаются друг друга в точке A. На окружности S_1 взята точка B, находящаяся на расстоянии 1 от точки A. Из точки B к окружности S_2 проведена касательная, которая касается S_2 в точке C. Найти длину отрезка BC.

$\boxed{\text{C5}}$ Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_a \sqrt{y+1}=\left(x^2-6x\right)^2 \\ x^2+y=6x \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

$\boxed{\text{C6}}$ Давным-давно ученики перемножали многозначные числа столбиком, не используя калькулятор или мобильный телефон. Учитель предложил трем учащимся перемножить два числа. После умножения множимого на отдельные цифры множителя один учащийся при сложении частных произведений забыл удержать в уме одну единицу некоторого разряда. Разделив при проверке результат на множитель, он получил в частном 971, а в остатке 214.

Второй ученик в указанном разряде не сделал ошибки, но при сложении цифр следующего разряда забыл прибавить двойку. Разделив при проверке результат на множитель, он получил в частном 365, а в остатке 198.

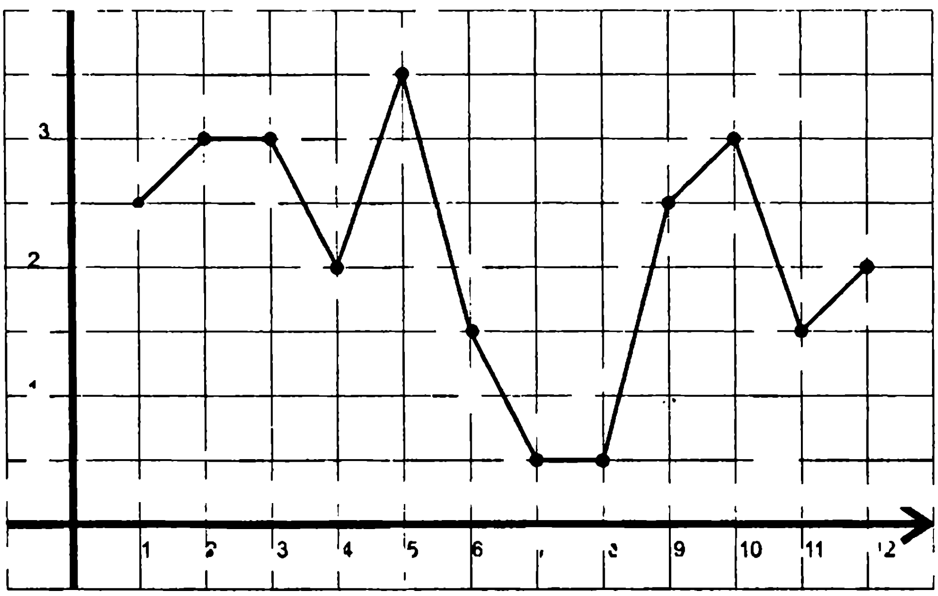
Третий ученик сделал подобную ошибку на единицу в следующем высшем разряде и получил при проверке в частном 940, а в остатке 48. Определите данные для умножения числа и укажите, в каких местах были сделаны ошибки.

Вариант №12

Часть 1

B1 Требуется перевезти 1105 мешков цемента с базы стройматериалов на стройку. Вес каждого мешка 50 кг. Найдите наименьшее количество рейсов, которые должен сделать грузовик грузоподъемность 3,5 тонны для подобной перевозки.

B2 На рисунке жирными точками представлены показания счетчика расхода горячей воды по месяцам в течение года. По горизонтальной оси откладываются номера месяцев, по вертикальной оси – расход воды в кубометрах. Для наглядности жирные точки соединены отрезками прямых. Найдите количество месяцев, в которые расход воды был не больше 2,5 кубометров?



B3 Найдите корень уравнения $9^x - 5 \cdot 3^3 - 36 = 0$

B4 В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания $AD = 5$, $BC = 3$, $\sin A = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. Найдите BD.

B5 Застройщику требуется приобрести 250 листов шифера. Он может купить шифер у одного из трех поставщиков. Цена шифера и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей застройщик заплатил бы за самую дорогую покупку с доставкой?

Фирма	Стоимость шифера (руб. за лист)	Стоимость доставки (в рублях)	Дополнительные условия
А	240	8000	Доставка со скидкой 50% при заказе больше 59000 руб.
Б	250	9000	Доставка со скидкой 40% при заказе больше 62000 руб.
В	260	8500	Бесплатная доставка при заказе больше 64000 руб.

B6 Площадь круга равна $\frac{9}{\pi}$. Найдите длину окружности.

B7 Найдите значение выражения $\frac{18\sin 103^\circ \cdot \cos 103^\circ}{\sin 154^\circ}$.

B8 Прямая $y = 5x + 2$ параллельна касательной к графику функции $y = -2x^2 + 3x + 5$. Найдите абсциссу точки касания.

B9 В правильную треугольную призму, объем которой равен $\frac{9\sqrt{3}}{\pi}$, вписан цилиндр. Найдите объем этого цилиндра.

B10 Изменение массы радиактивного вещества происходит по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T}$, где $m(t)$ – масса вещества в момент времени t в граммах, m_0 – масса вещества в начальный момент времени, T – период полураспада в минутах. К началу радиактивного распада имелось 6 грамм вещества. Через какое количество времени (в минутах) останется 1,5 грамма радиоактивного вещества, если его период полураспада равен 3 минуты.

B11 Дана функция $y = 2\ln(x+9) - 2x + 13$. Найдите ее наибольшее значение

B12 Свежий виноград содержит 98% воды, а изюм, полученный из винограда, содержит 4% воды. Сколько килограммов изюма получится из 60 кг винограда.

Часть 2

C1 Решите уравнение
$\sqrt{33 + 36\sin x - 6\cos x} = 6\sin x + 3$.

C2 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через O обозначим точку пересечения диагоналей грани BB_1C_1C куба. Найдите угол между прямыми AA_1 и OD_1.

C3 Решите неравенство $\log_x \log_3(2\cdot 9^x - 6\cdot 3^x + 5) \geqslant 1$.

C4 Две окружности S_1 и S_2 радиусов 2 и 1 соответственно касаются друг друга в точке A. На окружности S_2 взята точка B, находящаяся на расстоянии 1 от точки A. Через точки A и B проведена прямая, которая пересекает S_1 в точке C. Из точки C к окружности S_2 проведена касательная, которая касается S_2 в точке D. Найти длину отрезка CD.

C5 Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |a|^{x-y} = \log_2 x - 6 \\ x - \log_2 x = y - 6 \end{cases}$$

имеет не менее двух решений?

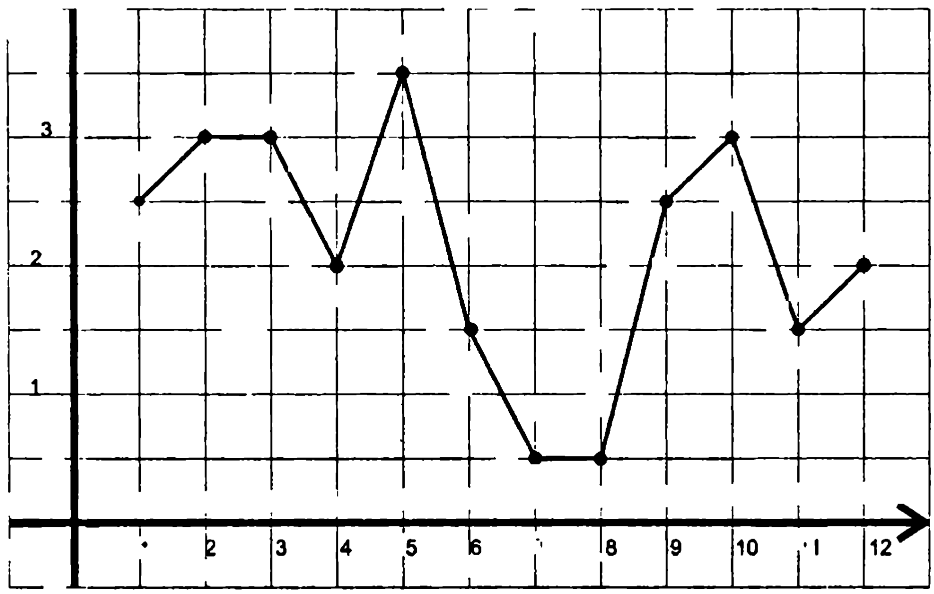
C6 На кривой, заданной уравнением $y^2 = 29x^2 - 1$ найдите все точки с рациональными координатами.

Вариант №13

Часть 1

B1 Фермеру надо разлить подсолнечное масло по бидонам. Он имеет 1378 литров масла и бидоны емкостью 60 литров и 25 литров. На сколько бидонов емкостью 25 литров потребуется больше, чем бидонов емкостью 60 литров?

B2 На рисунке жирными точками представлены показания счетчика расхода горячей воды по месяцам в течение года. По горизонтальной оси откладываются номера месяцев, по вертикальной оси - расход воды в кубометрах. Для наглядности жирные точки соединены отрезками прямых. Найдите количество месяцев, в которые расход воды был не меньше 2 кубометров?



B3 Найдите корень уравнения $25^{\log_5(x+3)} = 16$.

B4 В параллелограмме $ABCD$ стороны $AD = 4$, $AB = 3$ и $\cos B = -\frac{1}{3}$. Найдите квадрат диагонали AC параллелограмма.

$\boxed{\textbf{B5}}$ Туристическая фирма организует 10-ти дневный речной круиз из г.Самары в г.С-Петербург. На выбор клиенту предоставляются каюты разного класса: «люкс», «полулюкс» и 1-го класса. Общая стоимость круиза (проживание, питание, экскурсии) в каюте «люкс» составляет 61000 рублей, в каюте «полулюкс» – 52000 рублей, в каюте 1-го класса - 40000 рублей. Фирма предоставляет сезонные скидки: на каюту «люкс» – 10%, на каюту «полулюкс» – 12%, на каюту 1-го класса – 15%. На какую каюту приходится наибольшая скидка? В ответе укажите величину наибольшей скидки в рублях.

$\boxed{\textbf{B6}}$ Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты $(2;2)$, $(2;5)$, $(6;3)$, $(6;6)$.

$\boxed{\textbf{B7}}$ Найдите значение выражения $\log^3_{\sqrt{5}} 25$.

$\boxed{\textbf{B8}}$ Прямая $y = 5x + 6$ является касательной к графику функции $y = x^4 - 2x^2 + 5x + 6$. Найдите абсциссу точки касания.

$\boxed{\textbf{B9}}$ В шар вписан конус таким образом, что его осевое сечение является правильным треугольником. Найдите объем конуса, если объем шара равен $\dfrac{64}{3}$.

$\boxed{\textbf{B10}}$ Шарик бросают под острым углом к горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полета шарика (в метрах) определяется по формуле $H = \frac{v_0^2}{4g}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos 2\alpha\right)$ где $v_0 = 30$ м/сек – начальная скорость шарика, а ускорение свободного падения g равно 10 м/сек^2. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) шарик пролетит над стеной высоты $\frac{45\sqrt{3}}{4}$ метров?

$\boxed{\textbf{B11}}$ Дана функция $y = 2x^2 - 5x + 5\ln(x+1) - 7$. Найдите ее наибольшее значение на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right]$.

$\boxed{\textbf{B12}}$ Катер сначала проплыл 15 км по течению реки, а потом – 30 км по озеру, в которое впадает река. На весь путь он потратил 3,5 часа. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки 3 км/час.

Часть 2

C1 Решите уравнение

$$\frac{\cos x}{|\cos x|} = \sin x + \cos x$$

C2 В пирамиде $DABC$ все ребра равны a. Через O обозначим центр основания ABC, а через K – середину высоты DO пирамиды. Найдите расстояние от точки K до грани ABD.

C3 Решите неравенство $\sqrt{4\log_2^2 x} - \sqrt{3\log_2^2 x - 2} \leqslant 1$.

C4 Дана окружность S радиуса 2 и с центром в точке O. Из точки M к окружности S проведена касательная ME (где E – точка касания), которая образует с прямой MO угол $60°$. В этот угол вписана окружность так, что она касается извне окружности S. Найдите радиус этой вписанной окружности.

C5 Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 2xa + a^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2xa - 6y + 9 + a^2} = 3 \\ y^2 - (2a+1)\,y + a^2 + a - 2 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

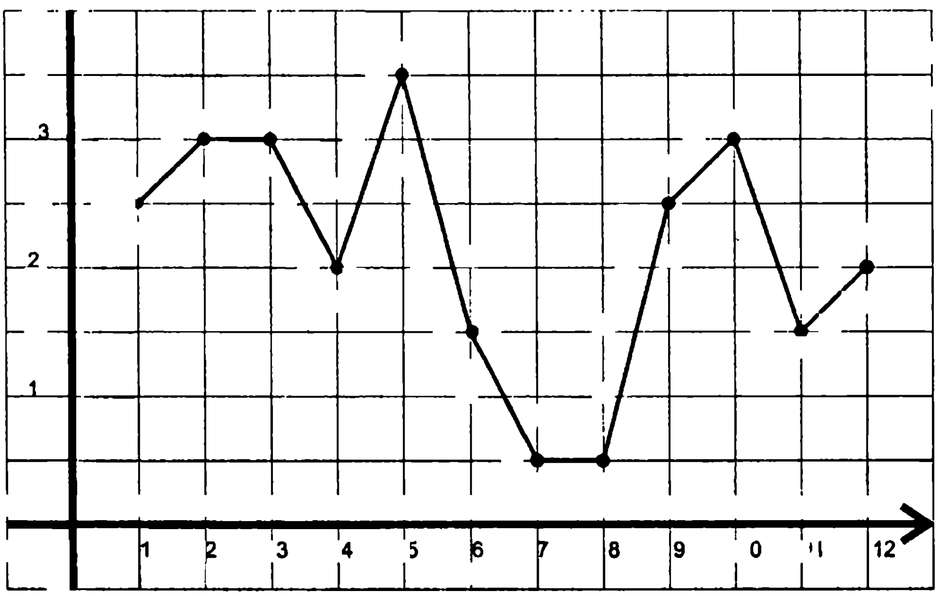
C6 Верно ли, что куб можно плоскостями, параллельными граням куба разбить на любое число кубов, большее, чем 70?

Вариант №14

Часть 1

B1 Тротуар шириной 2,4 м и длиной 80 м надо выложить плитками, имеющими форму квадрата со стороной 40 см. сколько таких плит для этого потребуется?

B2 На рисунке жирными точками представлены показания счетчика расхода горячей воды по месяцам в течение года. По горизонтальной оси откладываются номера месяцев, по вертикальной оси – расход воды в кубометрах. Для наглядности жирные точки соединены отрезками прямых. Найдите расход воды с апреля по сентябрь.



B3 Дано уравнение $\log_2(x+1) = 1-\log_2(2x-1)$. Найдите корень этого уравнения. Если оно имеет несколько корней, то в ответе укажите наименьший из них.

B4 В параллелограмме $ABCD$ стороны $AD = 4$, $AB = 3$ и $\cos B = -\frac{1}{3}$. Найдите квадрат диагонали BD параллелограмма.

$\boxed{\textbf{B5}}$ Туристическая фирма организует 10-ти дневный речной круиз из г. Самары в г. С-Петербург. На выбор клиенту предоставляются каюты разного класса: «люкс», «полулюкс» и 1-го класса. Общая стоимость круиза (проживание, питание, экскурсии) в каюте «люкс» составляет 61000 рублей, в каюте «полулюкс» – 52000 рублей, в каюте 1-го класса – 40000 рублей. Фирма предоставляет сезонные скидки: на каюту «люкс» - 10%, на каюту «полулюкс» – 12%, на каюту 1-го класса – 15%. На сколько рублей дешевле обойдется поездка в каюте 1-го класса по сравнению с поездкой в классе «люкс».

$\boxed{\textbf{B6}}$ Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(2;1)$, $(5;5)$, $(7;3)$.

$\boxed{\textbf{B7}}$ Найдите значение выражения $\log^4_{\sqrt{2}} 4$.

$\boxed{\textbf{B8}}$ Прямая $y = 7x-5$ является касательной к графику функции $y = x^4 - 16x^2 + 7x - 5$. Найдите абсциссу точки касания.

$\boxed{\textbf{B9}}$ В шар вписан конус таким образом, что его осевое сечение является правильным треугольником. Найдите объем шара, если объем конуса равен 27.

$\boxed{\textbf{B10}}$ Шарик бросают под острым углом к горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полета шарика (в метрах) определяется по формуле $H = \frac{v_0^2}{5g}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 2\alpha\right)$ где $v_0 = 25$ м/сек – начальная скорость шарика, а ускорение свободного падения g равно 10 м/сек^2. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) шарик пролетит над стеной высоты $12,5\sqrt{2}$ метров?

$\boxed{\textbf{B11}}$ Дана функция $y = 2x^2 - 3x - \ln(x) - 8$. Найдите ее наибольшее значение на отрезке $\left[\frac{17}{18}; \frac{19}{18}\right]$.

$\boxed{\textbf{B12}}$ От пристани отправился по течению реки плот. Через 5 часа 20 минут вслед за ним от этой же пристани отправилась моторная лодка, которая догнала плот, пройдя

20 км. Найдите скорость плота, если известно, что скорость лодки больше скорости плота на 12 км/час.

Часть 2

C1 Решите уравнение $2 - |\sin x| = 3\cos 2x$.

C2 В пирамиде $DABC$ все ребра равны 8. Через сторону AB основания ABC пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная ребру MC и пересекающая его в точке K. Найдите угол между плоскостями ABC и ABK, если площадь треугольника ABK равна $16\sqrt{2}$.

C3 Решите неравенство $\sqrt{2\log_2^2 x - \log_2 x} + \log_2 x \leqslant 2$.

C4 Дан прямоугольник $ABCD$, меньшая сторона которого AB равна 3. Через точки A и B проведена окружность диаметра $3\sqrt{5}$. Из точки C к этой окружности проведена касательная CK (где K – точка касания). Длина отрезка KC равна $3\sqrt{6}$. Найдите большую сторону прямоугольника BC.

C5 Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_{a^2} y = (x^2 + 3x + 2)^4 \\ y = x^2 + 3x + 2 \end{cases}$$

имеет не менее двух решений.

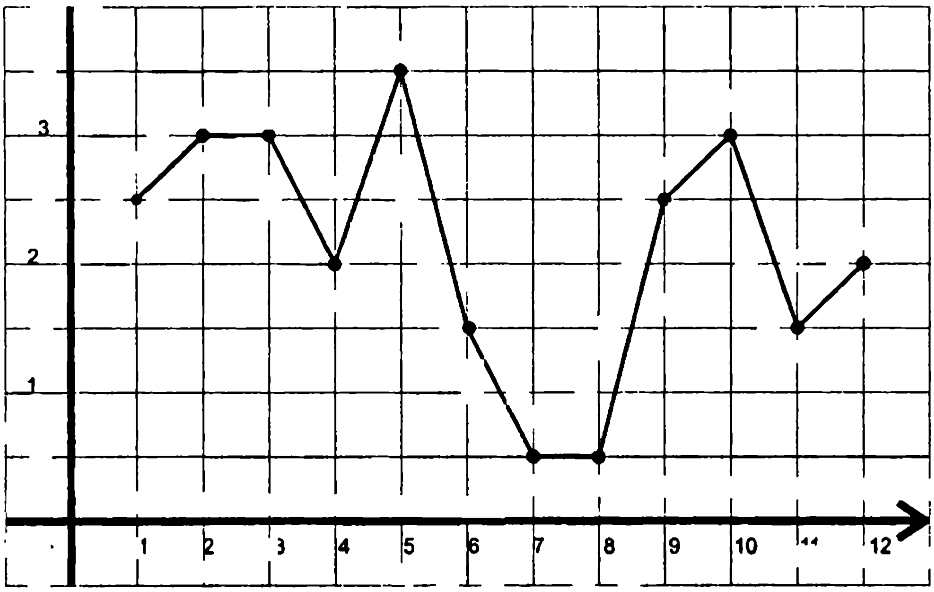
C6 Два ученика независимо друг от друга составили по одному семизначному числу, используя все цифры 1,2,3,4,5,6,7 по одному разу. Оказалось, что одно число больше другого. Верно ли, что большее число не делится на меньшее?

Вариант №15

Часть 1

B1 Поезд проехал 360 км со средней скоростью 40 км/час, при этом участок пути в 300 км он проехал со скорость 60 км/час. С какой скоростью поезд проехал оставшийся отрезок пути?

B2 На рисунке жирными точками представлены показания счетчика расхода горячей воды по месяцам в течение года. По горизонтальной оси откладываются номера месяцев, по вертикальной оси – расход воды в кубометрах. Для наглядности жирные точки соединены отрезками прямых. На сколько кубометров воды в мае было израсходовано больше, чем в ноябре?



B3 Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg}\frac{\pi(2x-1)}{3}=\sqrt{3}.$$

B4 AC и BD являются диагоналями в прямоугольнике $ABCD$. Сторона $AD = 10\sqrt{5}$ и $\sin\angle BAC = \frac{2}{3}$. Найдите другую сторону прямоугольника.

$\boxed{\textbf{B5}}$ Поставщик горючего собирается заключить договор на перевозку 10 тонн бензина на одну из трех бензозаправок. Расстояние до первой бензозаправки равно 300 км, до второй - 350 км, до третьей – 270 км. Перевозка 1 тонны бензина на 100 км до первой бензозаправки стоит 1700 рублей, до второй – 1500 рублей, до третьей – 1900 рублей. Сколько рублей надо заплатить поставщику за самый выгодный договор?

$\boxed{\textbf{B6}}$ Площадь круга, описанного вокруг правильного треугольника, равна $\pi\sqrt{3}$. Найдите площадь этого треугольника.

$\boxed{\textbf{B7}}$ Найдите значение выражения $\dfrac{\log^2_{\sqrt{3}} 27}{\log_{25}\sqrt{5}}$.

$\boxed{\textbf{B8}}$ Прямая $y = 10x$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$. Найдите абсциссу точки касания.

$\boxed{\textbf{B9}}$ В конус, осевое сечение которого является правильным треугольником, вписан шар. Найдите объем шара, если объем конуса равен $\frac{9}{8}$.

$\boxed{\textbf{B10}}$ Давление P (измеряемое в паскалях), которое оказывает свая на грунт, определяется по формуле $P = \dfrac{4mg}{\pi D^2}$, где $m = 1500$ кг - масса сваи, D – диаметр сваи (в метрах), $g = 10$ м/сек^2 – ускорение свободного падения, $\pi = 3$. Определите наименьший возможный диаметр сваи, при котором ее давление на грунт не превосходит 125000 паскалей.

$\boxed{\textbf{B11}}$ Дана функция $y = \cos^2 x + \sin x$. Найдите наибольшее значение этой функции на отрезке $[\pi/3; \pi]$.

$\boxed{\textbf{B12}}$ Во время кризиса бизнесмен потерял 35% имеющихся у него денег. После этого он вложил оставшиеся деньги в покупку акций и получил через некоторое время 65% прибыли. Какое количество процентов составляет его денежный капитал от первоначального. (Первоначальным капиталом считается капитал до кризиса.)

Часть 2

C1 Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\sin x+|\cos x|=0$$

C2 В пирамиде $DABC$ все ребра равны a. Через P и K обозначим середины ребер BD и CD соответственно. Найдите расстояние между прямыми AB и PK.

C3 Решите неравенство $\log_{x+1}\log_2(4^x-4\cdot 2^x+5)\leqslant 1$.

C4 Дан треугольник ABC, в котором угол C равен 30°, а сторона AC равна 8. Проведена окружность так, что она проходит через точку A, касается прямой BC в точке B и пересекает прямую AC в точке D. Оказалось, что длина отрезка AD равна 6. Найдите радиус окружности.

C5 Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} a^{y^2}=\sqrt[7]{-3x^2+18x-24} \\ 12x^2-72x+96=4y \end{cases}$$

имеет не менее двух решений.

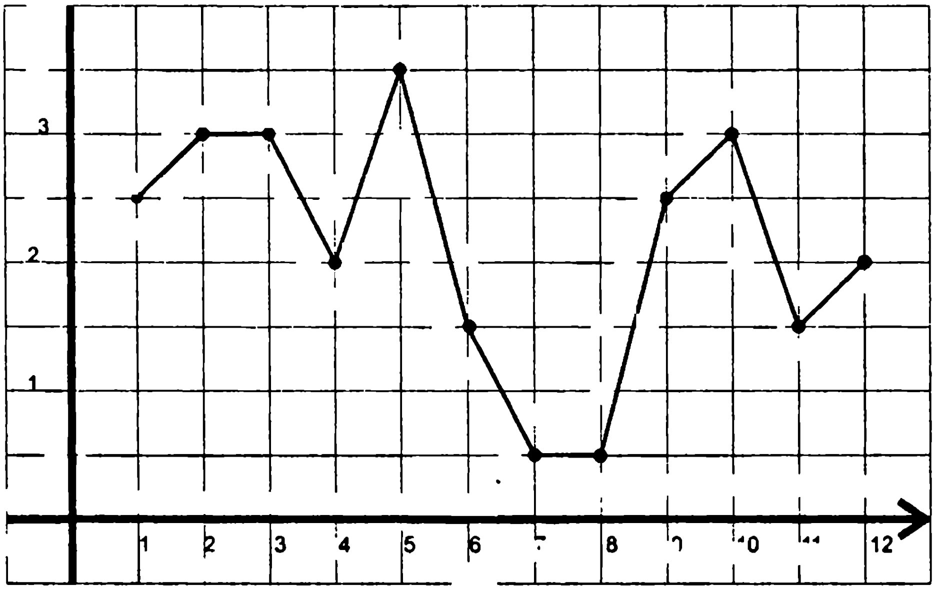
C6 При каких натуральных n сумма вида $1+2+3+\ldots+n$ является трехзначным числом, состоящим из одинаковых цифр?

Вариант №16

Часть 1

B1 Буханка хлеба стоит 17 рублей, литр молока – 20 рублей, а 1 кг сахара стоит на 60% дороже 1 литра молока. У покупателя 200 рублей. Он сначал купил 2 буханки хлеба и 1,5 литра молока. Сколько килограммов сахара он сможет купить на оставшиеся деньги?

B2 На рисунке жирными точками представлены показания счетчика расхода горячей воды по месяцам в течение года. По горизонтальной оси откладываются номера месяцев, по вертикальной оси – расход воды в кубометрах. Для наглядности жирные точки соединены отрезками прямых. На сколько кубометров воды в первом полугодии было израсходовано больше, чем во втором?



B3 Найдите наименьший целый положительный корень уравнения $\operatorname{tg}\dfrac{\pi(3x+1)}{4} = 1$.

B4 AC и BD являются диагоналями в прямоугольнике $ABCD$. Сторона $AD = 10$ и $\sin\angle BAC = \frac{2}{3}$. Найдите длину диагонали прямоугольника.

B5 Поставщик горючего собирается заключить договор на перевозку 10 тонн бензина на одну из трех бензозаправок. Расстояние до первой бензозаправки равно 300 км, до второй – 350 км, до третьей – 270 км. Перевозка 1 тонны бензина на 100 км до первой бензозаправки стоит 1700 рублей, до второй – 1500 рублей, до третьей – 1900 рублей. Сколько рублей надо будет заплатить поставщику, если он выберет самый невыгодный договор?

B6 Площадь круга, описанного вокруг правильного квадрата, равна 5π. Найдите площадь этого квадрата.

B7 Найдите значение выражения $\dfrac{\log_{36}\sqrt{6}}{\log_7^2 49}$.

B8 Дана функция $y = |-x^2+3x+4|$. Найдите абсциссу точки графика этой функции, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

B9 В шар вписан цилиндр, осевое сечение которого является квадратом. Найдите объем цилиндра, если объем шара равен $\dfrac{16}{3}\sqrt{2}$.

B10 Давление P (измеряемое в паскалях), которое оказывает свая на грунт, определяется по формуле $P = \dfrac{3mg}{\pi D^2}$, где $m = 2700$ кг – масса сваи, D – диаметр сваи (в метрах), $g = 10$ м/сек^2 – ускорение свободного падения, $\pi = 3$. Определите наименьший возможный диаметр сваи, при котором ее давление на грунт не превосходит 300000 паскалей.

B11 Дана функция $y = \cos^2 x + \sin x$. Найдите наименьшее значение этой функции на отрезке $[0; \pi/4]$.

B12 Производительность труда рабочего ежегодно увеличивалась на одно и то же число процентов и за два года поднялась с 500 деталей за смену до 720 деталей за смену. Найдите величину ежегодного прироста производительности труда (в процентах).

Часть 2

$\boxed{\text{C1}}$ Решите уравнение $|\cos x| = \cos(x + \frac{\pi}{5})$

$\boxed{\text{C2}}$ Квадрат $ABCD$ со стороной 4 является основанием пирамиды $SABCD$. Грань CDS перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Найдите расстояние между прямыми SD и BC, если высота пирамиды SM равна 4 и $DM : MC = 3 : 1$.

$\boxed{\text{C3}}$ Решите неравенство $\sqrt{3\log_2 x + 1} - \log_2 x - 1 \leqslant 0$.

$\boxed{\text{C4}}$ Две окружности S_1 и S_2 с центрами в точках O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках M И N. Углы $\angle MO_1N = 90°$ и $\angle MO_2N = 60°$. Найдите радиус окружности S_2, если расстояние между центрами окружностей равно $2\sqrt{3}$.

$\boxed{\text{C5}}$ Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} a^{3x+5y^2-7} = 21 - 15y^2 - 9x \\ 7x + 5y^2 = 11 \end{cases}$$

имеет от двух до четырех решений.

$\boxed{\text{C6}}$ При делении шестизначного числа, состоящего из одинаковых цифр, на четырехзначное, состоящее из одинаковых цифр, получено в частном 233 и некоторый остаток. После отбрасывания в делимом и делителе по одной цифре и нового деления частное не изменилось, а остаток уменьшился на 1000. Найдите первоначальные делимое и делитель

веты к задачам из вариантов №1–№16

Номера заданий											
B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
25	45	−5	7,8	11616	12	625	−0,8	67,5	0,5	2	72
440	24	4	2,6	8536	5	2	0,625	1,44	0,6	−2	80
6	6	5	2,4	2457	4,8	3	−3	15,75	4800	14	3
12	12	6	2,4	0,675	5	2	3	22,5	0,35	6	1,5
20	18	−9	4,375	12,5	25	125	4	2,25	14,52	2	10
38,2	12	−4	2,625	14,5	14	4	4	4	3,682	−4	20
8	17,5	1	8	2,34	18	0,5	4	10	4	−1	20
25	12	1,5	4	2,24	18	0,2	2	9	3	−1	160
5.29	14	4	0,8	1251250	29,5	0,5	3	10,5	13,75	−0,5	34
21.25	15	−0,5	0,6	176400	17	1	2	5,1	17	−0,25	7,5
29	13	0,5	5	42400	6,25	16	−0,5	9	12	−17	600
16	8	2	5	67900	6	−9	−0,5	3	6	29	1,25
33	8	1	33	6240	12	64	0	6	45	−7	12
1200	10,5	1	17	20900	7	256	0	96	22,5	−9	3
15	2	1	25	51000	2,25	144	−1	0,5	0,4	1,25	107,2
4,25	5,5	4	15	52500	10	0,0625	1,5	4	0,3	1	20

	Номера заданий	
	C1	C2
1	$\frac{\pi}{5}$	60°
2	$\frac{3}{5}\pi$	60°
3	$-\frac{1}{7}\pi;\quad -\frac{3}{5}\pi$	30°
4	$\frac{2}{5}\pi$	30°
5	$\arcsin\frac{4}{5}+2\pi n,\ -\frac{5}{6}\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$	$\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$
6	$\frac{1}{2}\pi+2\pi n;\ -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$	$\operatorname{arctg}2$
7	$\frac{7}{12}\pi+2\pi n;\ \frac{11}{12}\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$	30°
8	$\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ -\frac{3}{4}\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$	$4\sqrt{17}$
9	$\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{2}{3}\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$	$\sqrt{7}$
10	$(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$
11	$\frac{3}{4}\pi+2\pi n;\ \pi+\operatorname{arctg}3+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$	$3\sqrt{2}$
12	$\frac{2}{3}\pi+2\pi n;\ \arccos\frac{2}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$	$\operatorname{arctg}\sqrt{5}$
13	$\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$	$\frac{a\sqrt{6}}{18}$
14	$\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$	$\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$
15	$-\frac{\pi}{6}+2\pi n.\ \pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$
16	$-\frac{\pi}{10}+2\pi n,\ \frac{7\pi}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$	$3,2$

	Номера заданий	
	C3	C4
1	$\left(0; 2-\sqrt{3}\right) \cup \left[3; \frac{7}{2}\right)$	2 или 4,5
2	$(0; 1] \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2\right)$	2 или 4,5
3	$\left(-4; -\frac{7}{2}\right] \cup \left(-2+\sqrt{2}; \infty\right)$	2,1 или 3,9
4	$\left(1-\sqrt{3}; 0\right] \cup (1; 2) \cup \left(2; \frac{8}{3}\right)$	0,45
5	$(-\infty; -3) \cup (-1; 1] \cup [17; \infty)$	$\frac{4}{3}$ или 12
6	$(-\infty; -3) \cup \left(-3; -\frac{8}{3}\right) \cup [2; \infty)$	$\frac{3}{4}$ или 48
7	$(-5; 1) \cup (2; 3) \cup (3; 4) \cup (7; \infty)$	6 или 9
8	$(-\infty; -3) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; \infty)$	$10 \pm \sqrt{2}$
9	$(-1; 0) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 4\right]$	$6 \pm 4\sqrt{2}$
10	$(0; 1) \cup \left(1; \sqrt{2}\right) \cup \left(2; \sqrt{5}+1\right]$	$\frac{a}{4\sqrt{3}}$ или $\frac{3\sqrt{3}a}{4}$
11	$\left(\log_3 \frac{3}{2}; \log_3 2\right] \cup (1; \infty)$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$ или $\frac{\sqrt{2}}{2}$
12	$\left(\log_3 2; \log_3 \frac{5}{2}\right] \cup (1; \infty)$	$\sqrt{6}$ или $\sqrt{2}$
13	$\left[\frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right] \cup [2; 8]$	$2 \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}$
14	$\left[\frac{1}{16}; 1\right] \cup \left[\sqrt{2}; 2\right]$	$3(\sqrt{7} \pm 1)$
15	$(-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \log_2 5)$	$4\sqrt{5 \pm 2\sqrt{3}}$
16	$\left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; 1\right) \cup [2; \infty)$	$2(3 \pm \sqrt{3})$

	Номера заданий	
	C5	C6
1	$(-\infty; -3] \cup (1; 3) \bigcup (3; +\infty)$	10
2	$0,5$	15
3	При $(-1; 1) \bigcup (3; +\infty)$	10416
4	0	810
5	$(-1: \infty)$	108 или 1107
6	$0,25$	нет
7	$4 \leq \|a\| \leq \sqrt{41} + 1$	$x = 16667$, $y = 33334$
8	$-\frac{\sqrt{265}}{8}$	7 или 14
9	$(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$	$(17; 34)$, $(13; 52)$
10	$(1; +\infty) \cup \left\{e^{\frac{-1}{e}}\right\}$	23 и 46
11	$\left\{\frac{1}{e}\right\} \cup \left(\sqrt[162]{10}; \infty\right)$	972 и 314, первый ученик умен шил на единицу число сотен, вто рой уменьшил на две единиц число тысяч, третий уменьшил на единицу число десятков тысяч.
12	$\left(-e^{\frac{1}{e}}; -1\right) \cup \left(1; e^{\frac{1}{e}}\right)$	$x = \frac{k^2-10k+29}{2(k^2-29)}$, $y = \frac{-5k^2+58k-14}{2(k^2-29)}$ где $k \in \mathbb{Q}$
13	$[-2; 4]$	да
14	$\left[-e^{\frac{1}{8e}}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup \left(1; e^{\frac{1}{8e}}\right]$	верно
15	$\left(0; e^{\frac{1}{14e}}\right]$	36
16	$\left[e^{-\frac{3}{e}}; \left(\frac{7}{48}\right)^{\frac{7}{16}}\right] \cup (1; \infty)$	777777 или 3333

Дополнительные задачи.

Задача С1.

1. $\dfrac{20x^2 - 23\pi x + 6\pi^2}{\sqrt{\cos x}} = 0$

2. $\dfrac{25x^2 - 4\pi^2}{\sqrt{\sin x}} = 0$

3. $\dfrac{25x^2 - 9\pi^2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0$

4. $\dfrac{25x^2 - 5\pi x - 6\pi^2}{\sqrt{\sin x + \cos x}} = 0$

5. $\dfrac{25x^2 - 4\pi^2}{\sqrt{\sin x + \cos x - 1}} = 0$

6. $\dfrac{10x^2 + 3\pi x - \pi^2}{\sqrt{2\cos x + 1}} = 0$

7. $\dfrac{35x^2 - 31\pi x + 6\pi^2}{\sqrt{2\sin x - 1}} = 0$

8. $\dfrac{35x^2 + 11\pi x - 6\pi^2}{\sqrt{1 - 2\sin x}} = 0$

9. $\dfrac{25x^2 - 10\pi x - 3\pi^2}{\sqrt{\cos 2x + \sin x}} = 0$

10. $\dfrac{81x^2 - 25\pi^2}{\sqrt{2\sin x + \operatorname{tg} x}} = 0$

11. $\dfrac{20x^2 - 11\pi x - 3\pi^2}{\sqrt{2\cos x + \operatorname{ctg} x}} = 0$

12. $\dfrac{81x^2 - 25\pi^2}{\sqrt{\sin x + \sin 2x}} = 0$

13. $\dfrac{5x^2 + 4\pi x - \pi^2}{\sqrt{\cos x + \cos 2x}} = 0$

14. $\dfrac{10\sin^2 x - 3\sin x - 4}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0$

15. $\dfrac{6\cos^2 x + \cos x - 2}{\sqrt{-\operatorname{tg} x}} = 0$

16. $\dfrac{6\cos^2 x + \cos x - 2}{(3\cos x + 2)\sqrt{-\operatorname{tg} x}} = 0$

17. $\dfrac{2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{-\sin x}} = 0$

18. $\dfrac{\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}{\sqrt{-\sin x}} = 0$

19. $\dfrac{\sin 2x + 3\cos^2 x}{\sqrt{2\sin x + 1}} = 0$

20. $\dfrac{6\cos^2 x - \cos x - 1}{\sqrt{2\sin x + 1}} = 0$

21. $\dfrac{12\sin^2 x - 11\sin x + 2}{\sqrt{\sin 2x}} = 0$

22. $\dfrac{9\cos^2 x - 9\cos x + 2}{\sqrt{2\cos 2x + 1}} = 0$

23. $\dfrac{9\sin^2 x - 9\sin x + 2}{\sqrt{2\cos 2x - 1}} = 0$

24. $\dfrac{\sin 2x - \cos x}{\sqrt{\sin 2x + \sin 3x}} = 0$

25. $\dfrac{\sin 2x - \sqrt{3}\sin x}{\sqrt{\sin 2x + \cos 3x}} = 0$

26. $\dfrac{\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{\sqrt{\cos 2x + \cos 3x}} = 0$

27. $\dfrac{\cos 2x - \cos x + 1}{\sqrt{\sin 3x - \cos 2x}} = 0$

28. $\sqrt{1 - \cos x} = \sin x$

29. $\sqrt[4]{12}\sin x = \sqrt{\sin 2x}$

30. $\sqrt{5\cos x - \cos 2x} = -2\sin x$

31. $\sqrt{5\sin x + \cos 2x} + 2\cos x = 0$

32. $\sqrt{4\cos 2x - 2\sin 2x} = 2\cos x$

33. $\sqrt{-3\sqrt{3}\sin x - 4} = \sqrt{2}\cos x$

34. $\sqrt{-\cos x} = \sqrt{2\sin^2 x - 1}$

35. $\sqrt{3 - \cos 2x - \sin 2x} = -2\sqrt{2}\sin x$

36. $\sqrt{2 - 2\cos x} = 4\cos x - 1$

37. $\sqrt{8\sin x - 6\cos x + 16} = 4\sin x + 1$

38. $\sqrt{7\cos^2 x - 3} = 3\sin x - \sqrt{2}$

39. $\sqrt{\sin x} = \sqrt{2\cos^2 x - 1}$

40. $\sqrt{4 + 3\sin x - 2\cos^2 x} = 2\sin x + 1$

41. $\sqrt{5 + 5\cos x - 3\sin^2 x} + 3\cos x + 1 = 0$

42. $\sqrt{3 - 2\cos x} = 2 - 3\cos x$

43. $\sqrt{2 - \sin x} = 1 - 2\sin x$

44. $\sqrt{1-\dfrac{1}{\sin x}}=\operatorname{ctg} x$

45. $\sqrt{1+\dfrac{1}{\cos x}}=\operatorname{tg} x$

46. $\sqrt{-\sin 2x}=2\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}\cos x$

47. $\sqrt{-\sin 2x}=\sqrt{2}\sin x+2\sqrt{2}\cos x$

Ответы:

1. $\frac{2}{5}\pi$. **2.** $\frac{2}{5}\pi$. **3.** $-\frac{3}{5}\pi$. **4.** $\frac{3}{5}\pi$. **5.** $\frac{2}{5}\pi$. **6.** $\frac{\pi}{5}$; $-\frac{\pi}{2}$. **7.** $\frac{2}{7}\pi$; $\frac{3}{5}\pi$.
8. $-\frac{3}{5}\pi$. **9.** $\frac{3}{5}\pi$. **10.** $-\frac{5}{9}\pi$. **11.** $-\frac{\pi}{5}$. **12.** $\frac{5}{9}\pi$. **13.** $\frac{1}{5}\pi$.

14. $-\frac{5}{6}\pi+2\pi n$; $\arcsin\frac{4}{5}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

15. $\left(\pi-\arccos\frac{2}{3}\right)+2\pi n$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

16. $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

17. $\frac{5}{4}\pi+2\pi n$; $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

18. $-\frac{1}{3}\pi+2\pi n$; $\frac{7}{6}\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

19. $\frac{1}{2}\pi+2\pi n$; $\pi-\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\right)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

20. $\frac{1}{3}\pi+2\pi n$; $\pi-\arccos\left(\frac{1}{3}\right)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

21. $\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2\pi n$; $\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

22. $\pm\arccos\left(\frac{2}{3}\right)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

23. $(-1)^n\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

24. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **25.** $2\pi n$; $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

26. $2\pi n$; $\pm\frac{3}{4}\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **27.** $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

28. $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **29.** πn; $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

30. $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **31.** $\frac{5}{6}\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

32. $2\pi n$; $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **33.** $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

34. $\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **35.** $-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\quad \pi+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
36. $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **37.** $\frac{\pi}{3}+2\pi n;\quad \pi-\arccos\frac{1}{8}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
38. $(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **39.** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
40. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **41.** $\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
42. $\pm\arccos\frac{1}{9}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **43.** $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
44. $\frac{\pi}{2}+2\pi n;\quad -\frac{5}{6}\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **45.** $\pi+2\pi n;\quad \frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
46. $\frac{3}{4}\pi+2\pi n;\quad -\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
47. $-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\quad \pi-\operatorname{arctg}4+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Задача С3.

1. $\log_{|x+2|}(3+4x+5x^2) \leqslant 2$

2. $\log_{|x+1|}(5x^2+4x+1) \leqslant 2$

3. $\log_{|x+4|}(2+3x+x^2) \leqslant 2$

4. $\log_{|x+2|}(1+3x+x^2) \leqslant 2$

5. $\log_{|x|}(1+3x+x^2) \leqslant 2$

6. $\log_{|x+2|}(4+x-5x^2) \leqslant 2$

7. $\log_{|x-4|}(4+3x-x^2) \leqslant 2$

8. $\log_{|x-2|}(4+x-5x^2) \leqslant 2$

9. $\log_{(x-1)^2} \dfrac{x+6}{|x-6|} < \dfrac{1}{2}$

10. $\log_{(x-2)^2} \dfrac{x+6}{|x-3|} < \dfrac{1}{2}$

11. $\log_{(x-2)^2} \dfrac{2-5x}{|x-1|} < \dfrac{1}{2}$

12. $\log_{(x-3)^2} \dfrac{3-5x}{|x-1|} < \dfrac{1}{2}$

13. $\log_{(x-3)^2} \dfrac{2-4x}{|x+4|} < \dfrac{1}{2}$

14. $\log_{(x+1)^2} \dfrac{5-3x}{|x+5|} < \dfrac{1}{2}$

15. $\log_{(x+2)^2} \dfrac{4-3x}{|x+2|} < \dfrac{1}{2}$

16. $\log_{(x+3)^2} \dfrac{5-4x}{|x+5|} < \dfrac{1}{2}$

17. $\log_{(1+2|x+1|)}(1+|x+2|) \geqslant 1$

18. $\log_{|x+2|}(5|x-5|-5) \geqslant 1$

19. $\log_{|x+2|}(|x-5|-5) \geqslant 2$

20. $\log_{|x+2|}(|x-3|-3) \geqslant 2$

21. $\log_{|x+2|}(2|x-1|-3) \geqslant 1$

22. $\log_{|x+2|}(3|x-5|+3) \leqslant 1$

23. $\log_{|x+2|}(|x-4|+3) \leqslant 1$

24. $\log_{|x+2|}(|x-4|+4) \geqslant 1$

25. $\log_{(5x-2x^2)}(3x-x^2) \leqslant 1$

26. $\log_{(-3x^2+7x-2)}(-2x^2+4x) \leqslant 1$

27. $\log_{(x^2+3x+2)}(7x-x^2) < 1$

28. $\log_{(x^2+4x-5)}(-2x^2+3x+5) \leqslant 1$

29. $\log_{(5x^2+2x-3)}(-4x^2+x+5) \leqslant 1$

30. $\log_{(x^2+x)}(x^2+2x-3) \leqslant 0$

31. $\log_{(x^2+2x+1)}(3x^2+x) \leqslant 1$

32. $\log_{(x^2+3x)}(3x^2+2x-1) \geqslant 0$

33. $\log_{(x+2)}(x^3-4x^2-x+4) \geqslant 2$

34. $\log_{(x-2)}(x^3-4x^2+x) \leqslant 2$

35. $\log_{(x+3)}(x^3+2x^2-3x) \leqslant 2$

36. $\log_{(x+2)}(x^3-4x^2-x+4) \leqslant 2$

37. $\log_{(x+2)}(x^3 - 3x^2 + 4) \leqslant 2$

38. $\log_{(x+2)}(x^3 + x^2 + 4) \leqslant 2$

39. $\log_{(x+2)}(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) \leqslant 2$

40. $\log_{(x+2)}(x^3 + x^2 - 3x - 2) \leqslant 2$

41. $\log_{x+1} \log_3(2 \cdot 9^x - 4 \cdot 3^x + 3) \leqslant 1$

42. $\log_x \log_3(3 \cdot 9^x - 5 \cdot 3^x + 3) \leqslant 1$

43. $\log_x \log_3(9^x - 6 \cdot 3^x + 6) \leqslant 1$

44. $\log_{x+2} \log_3(2 \cdot 9^x + 4 \cdot 3^x + 3) \leqslant 1$

45. $\log_{x-1} \log_2(\cdot 4^x - 4 \cdot 2^x + 5) \geqslant 1$

46. $\log_x \log_2(4^x - 4 \cdot 2^x + 4) \leqslant 1$

47. $\log_x \log_2(2 \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x + 3) \geqslant 1$

48. $\log_{x+1} \log_2(4 \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x + 2) \geqslant 1$

49. $\sqrt{2\log_2 x + 1} - \sqrt{3\log_2 x + 4} + 1 \leqslant 0$

50. $\sqrt{6\log_2 x - 2} - \sqrt{4\log_2 x - 3} \leqslant 1$

51. $\sqrt{2\log_2 x - 1} - \sqrt{3\log_2 x + 1} + 1 \leqslant 0$

52. $\sqrt{\log_2 x - 4} - \sqrt{3\log_2 x + 1} + 3 \leqslant 0$

53. $\sqrt{-3\log_3^2 x + 2\log_3 x + 1} + \log_3 x \leqslant 1$

54. $\sqrt{-\log_2^2 x + 2\log_2 x + 3} + \log_2 x \leqslant 3$

55. $\sqrt{2\log_2^2 x - 2} + \log_2 x \leqslant 1$

56. $\sqrt{3\log_2^2 x - 2\log_2 x} + \log_2 x \leqslant 2$

Ответы:

1. $(-3;-2)\cup(-2;-1)\cup\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ **2.** $(-2;-1)\cup\left(-1;-\frac{1}{2}\right]$
3. $(-5;-4)\cup(-4;-3)\cup\left[-\frac{14}{5};-2\right)\cup(-1;\infty)$ **4.** $\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2};\infty\right)$
5. $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)\cup\left[-\frac{1}{3};0\right)\cup(0;1)$ **6.** $\left(-\frac{4}{5};-\frac{1}{2}\right]\cup[0;1)$
7. $\left(-1;\frac{3}{2}\right]\cup(3;4)$ **8.** $\left(-\frac{4}{5};0\right]\cup\left[\frac{5}{6};1\right)$ **9.** $(-6;0)\cup(0;1)\cup(1;2)\cup(8;\infty)$ **10.** $(-6;0)\cup(1;2)\cup(2;3)\cup(6;\infty)$ **11.** $(-\infty;-2)\cup\left(0;\frac{2}{5}\right)$
12. $(-\infty;-1)\cup\left(0;\frac{3}{5}\right)$ **13.** $(-\infty;-7)\cup\left(-2;\frac{1}{2}\right)$ **14.** $(-\infty;-9)\cup(-2;-1)\cup(-1;0)\cup\left(0;\frac{5}{3}\right)$ **15.** $(-\infty;-7)\cup(-3;-2)\cup(-2;-1)\cup\left(0;\frac{4}{3}\right)$ **16.** $(-\infty;-6-\sqrt{26})\cup(-4;-3)\cup(-3;-2)\cup(-6+\sqrt{26};\infty)$
17. $\left[-\frac{4}{3};-1\right)\cup(-1;0]$ **18.** $(-\infty;-3)\cup(-1;3]\cup[8;\infty)$
19. $[-4;-3)$ **20.** $[-4;-3)$ **21.** $(-\infty;-3)\cup[7;\infty)$
22. $(-3;-2)\cup(-2;-1)\cup[4;7]$ **23.** $(-3;-2)\cup(-2;-1)\cup\left[\frac{5}{2};\infty\right)$
24. $(-\infty;-3)\cup(-1;3]$ **25.** $\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4};2\right]\cup\left(\frac{5+\sqrt{17}}{4};\frac{5}{2}\right)$
26. $\left(\frac{1}{3};\frac{7-\sqrt{13}}{6}\right)\cup\left[1;\frac{7+\sqrt{13}}{6}\right)$ **27.** $(0;1)\cup(1;7)$
28. $(1;-2+\sqrt{10})\cup\left[\frac{5}{3};\frac{5}{2}\right)$ **29.** $\left(\frac{3}{5};\frac{-1+\sqrt{21}}{5}\right)\cup\left[\frac{8}{9};\frac{5}{4}\right)$
30. $(-\infty;-3)\cup(1;3]$ **31.** $(-2;-1)\cup\left(-1;-\frac{1}{2}\right]\cup(0;1]$
32. $\left(-\infty;-\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\cup[1;\infty)$ **33.** $\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{2};0\right]\cup\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{2};\infty\right)$
34. $(2+\sqrt{3};4]$ **35.** $(-3;-2)\cup[-1;0)\cup(1;3]$
36. $\left(-1;\frac{5-3\sqrt{5}}{2}\right]\cup[0;1)\cup\left(4;\frac{5+3\sqrt{5}}{2}\right]$
37. $(-1;2-2\sqrt{2}]\cup[0;2)\cup(2;2+2\sqrt{2}]$ **38.** $(-2;-1)\cup[0;2]$
39. $[2-\sqrt{10};-1)\cup[0;1)\cup(\sqrt{5}+1;2+\sqrt{10}]$
40. $(-2;-1)\cup\left(-1;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};3\right]$ **41.** $(-1;-\log_3 2]\cup(0;1]$
42. $(0;1)$ **43.** $(\log_3 5;\log_3 6]$ **44.** $(-2;-1)\cup\left[0;\log_3\frac{3}{2}\right]$
45. $\left(1;\log_2\frac{5}{2}\right]\cup(2;\infty)$ **46.** $(\log_2 3;2]$ **47.** $\left(0;\log_2\frac{3}{2}\right]\cup(1;\infty)$
48. $(-1;0)\cup(0;\infty)$ **49.** $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};1\right]\cup[16;\infty]$ **50.** $[2;8]$ **51.** $[\sqrt{2};2]\cup[32;\infty)$ **52.** $[16;32]\cup[256;\infty)$ **53.** $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{3}};1\right]\cup\{3\}$ **54.** $\left[\frac{1}{2};2\right]\cup\{8\}$
55. $\left[\frac{1}{8};\frac{1}{2}\right]\cup\{2\}$ **56.** $\left[\frac{1}{4};1\right]\cup\left[\sqrt[3]{4};2\right]$

Задача С5.

1. Дана линейная система уравнений относительно неизвестных x, y. Проведите исследование системы, т.е. определите, при каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 8x + ay = -5, \\ ax + 2y = 0.5(a-1). \end{cases}$$

1а) имеет единственное решение; 1б) найдите это решение; 1в) определите при каких значениях a решение (x, y) удовлетворяет условию $x \cdot y > 0$; 1г) определите при каких значениях a решение (x, y) удовлетворяет условию $x \cdot y < 0$; 2) не имеет решений; 3) имеет бесконечное множество решений. Для каждого из трех случаев дайте геометрическую интерпретацию.

2. Дана линейная система уравнений относительно неизвестных x, y. Проведите исследование системы, т.е. определите, при каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} ax + 2y = a^2, \\ 2x + ay = 4. \end{cases}$$

1а) имеет единственное решение; 1б) найдите это решение; 1в) определите при каких значениях a решение (x, y) удовлетворяет условию $x \cdot y > 0$; 1г) определите при каких значениях a решение (x, y) удовлетворяет условию $x \cdot y < 0$ 2) не имеет решений; 3) имеет бесконечное множество решений.

3. Дана линейная система уравнений относительно неизвестных x, y. Проведите исследование системы, т.е. определите, при каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 2x + ay = 3, \\ ax + 2y = a - 1. \end{cases}$$

1а) имеет единственное решение; 1б) найдите это решение; 1в) определите при каких значениях a решение (x, y) удовлетворяет условию $x \cdot y > 0$; 1г) определите при каких значениях a решение

(x, y) удовлетворяет условию $x \cdot y < 0$; 2) не имеет решений; 3) имеет бесконечное множество решений. Для каждого из трех случаев дайте геометрическую интерпретацию.

4. Найдите все значения параметра a при которых система имеет единственное решение

$$\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 = a \\ |x| + |y-1| = 1 \end{cases}$$

5. Найдите все значения параметра a, при которых система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ |x-1| + |y| = 1 \end{cases}$$

6. Найдите все значения параметра a, при которых система имеет единственное решение

$$\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 = a \\ |x| + |y+1| = 1 \end{cases}$$

7. Найдите все значения параметра a. при которых система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ |x-1| + |y+1| = 1 \end{cases}$$

8. Найдите те значения параметра a, при которых графики функций $y = 2|x| + |x-7|$ и $y = 2|x-3| + x + a$ имеют только одну общую точку. Укажите координаты этой точки.

9. Найдите те значения параметра a, при которых графики функций $y = 2|x+5| + |x-3|$ и $y = 2|x-1| + x + a$ имеют: 1) только одну общую точку; 2) бесконечно много общих точек. Укажите координаты этих точек.

10. Найдите те значения параметра a, при которых графики функций $y = a - |x-1| - |x-2| - |x-3|$ и $y = |x+1| + |x+2|$ имеют только одну общую точку. Укажите координаты этой точки.

11. Найдите те значения параметра a, при которых графики функций $y = a - |x-1| - |x-2| - |x-3|$ и $y = |x+1| + |x+2|$ имеют не менее двух общих точек. Укажите координаты этих точек.

12. Постройте в системе xoy множество точек, заданных неравенством $y \geqslant \sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2+2x+1} - x$. Чему равно наименьшее значение: 1) $a = y - \frac{x}{2}$, 2) $a = y + \frac{x}{3}$ если точка (x, y) принадлежат построенному множеству?

13. Постройте в системе xoy множество точек, заданных неравенством $y \geqslant \sqrt{4x^2-16x+16} + \sqrt{4x^2+16x+16} + |x|$. Чему равно наименьшее значение $a = y + \frac{2x}{3}$, если точка (x, y) принадлежат построенному множеству?

14. Постройте в системе xoy множество точек, заданных неравенством $y \geqslant \sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{x^2+6x+9} + |x-5|$. Чему равно наименьшее значение $a = -x + 3y$, если точка (x, y) принадлежат построенному множеству?

15. Постройте в системе xoy множество точек, заданных неравенством $y \geqslant \sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{x^2+6x+9} + \sqrt{x^2-10x+25}$. Чему равно наибольшее значение $a = x - 3y$, если точка (x, y) принадлежат построенному множеству?

16. Постройте в системе xoy множество точек, заданных неравенством $y \geqslant -\sqrt{1-(x+2)^2}$. Чему равно наименьшее значение $a = y - x$, если точка (x, y) принадлежат построенному множеству? В какой точке достигается наименьшее значение $a = y - x$?

17. Для каждого значения параметра a укажите число общих точек графиков функций $y = x^2 - 4x + |4-2x|$ и $y = a$. Укажите координаты этих точек.

18. Для каждого значения параметра a укажите число обших точек графиков функций $y = -x^2 + 3x + |x-4|$ и $y = a$. Укажите координаты этих точек.

19. Для каждого значения параметра a укажите число общих точек графиков функций $y = -2x^2 + 5x + |3x-3|$ и $y = a$. Укажите координаты этих точек.

20. Для каждого значения параметра a укажите число общих точек графиков функций $y = -2x^2 + 5x + |3x-3|$ и $y = ax$.

Укажите координаты этих точек.

21. Найдите все значениях параметра a, при которых система

$$\begin{cases} -x + y^2 + a = 0 \\ -x^2 - y - a = 0; \end{cases}$$

имеет единственное решение?

22. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x + y^2 + a = 0 \\ x^2 + y + a = 0; \end{cases}$$

имеет единственное решение?

23. Найдите все значениях параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x - y^2 - a = 0 \\ x^2 - y + a = 0; \end{cases}$$

имеет единственное решение?

24. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 49 \leq 10\left(|x| + |y|\right), \\ x^2 + y^2 - 4x = a^2 - 4; \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

25. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 17 \leq 6\left(|x| + |y|\right), \\ x^2 + y^2 + 2x = a^2 - 1; \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

26. Найдите все значения параметра a. при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 7 \leq 4\left(|x| + |y|\right), \\ x^2 + y^2 + 2y = a^2 - 1; \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

27. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |2x + 3y| + |2x - 3y| = 7 \\ x^2 + y^2 = a^2 - 4 - 4y \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

28. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+4xy+4y^2}+\sqrt{x^2-4xy+4y^2}=4 \\ x^2+y^2-6x-14y=a^2-58 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

29. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \sqrt{4x^2+4xy+y^2}+\sqrt{4x^2-4xy+y^2}=\sqrt{14-6\sqrt{5}}+\sqrt{14+6\sqrt{5}} \\ x^2+y^2-a^2=10x+2y-26 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

30. Исследуйте систему уравнений

$$\begin{cases} y=|x-2|+|x+3| \\ y=ax-1 \end{cases}$$

в зависимости от значений параметра a. Выясните, при каких значениях a 1) система имеет конечное число решений и найдите эти решения; 2) система не имеет решений; 3) система имеет бесконечное множество решений.

31. Исследуйте систему уравнений

$$\begin{cases} y=|x-3|+|x+2| \\ y=ax+1 \end{cases}$$

в зависимости от значений параметра a. Выясните, при каких значениях a 1) система имеет конечное число решений и найдите эти решения; 2) система не имеет решений; 3) система имеет бесконечное множество решений.

32. Исследуйте систему уравнений

$$\begin{cases} y=|x-3|+|x+2| \\ y=ax-1 \end{cases}$$

в зависимости от значений параметра a. Выясните, при каких значениях a 1) система имеет конечное число решений и найдите эти решения: 2) система не имеет решений; 3) система имеет бесконечное множество решений.

33. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \log_a\left(x^3+y-1\right)=x^3-3, \\ 2x^3+y=4 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение?

34. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \log_a\left(x^4+y-1\right)=x^4-3, \\ 2x^4+y=4 \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

35. Определите количество решений системы

$$\begin{cases} \log_a\sqrt{y+1}=\left(x^2-7x\right)^2, \\ x^2+y=7x \end{cases}$$

в зависимости от допустимых значений параметра a.

36. Определите количество решений системы

$$\begin{cases} \log_{|a|}(y+2)^5=\left(x^2-8x\right)^2, \\ x^2+y=8x \end{cases}$$

в зависимости от допустимых значений параметра a.

37. Определите количество решений системы

$$\begin{cases} \log_a\sqrt[4]{2y}=\left(x^2-10x\right)^2, \\ x^2+y=10x \end{cases}$$

в зависимости от допустимых значений параметра a.

38. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |a-1|^{x-y+1}=\log_\pi x-7, \\ x-\log_\pi x=y-8 \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

39. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |a-1|^{2x-2y}=\log_{\sqrt{2}} x-7, \\ x-\log_{\sqrt{2}} x=y-7 \end{cases}$$

имеет: 1) ровно одно решение; 2) ровно два решения?

40. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |a-\pi|^{4x-4y} = \log_e x - 10, \\ x - \log_e x = y - 10 \end{cases}$$

имеет: 1) ровно одно решение; 2) ровно два решения?

41. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2-2xa+a^2+4y+4} + \sqrt{x^2+y^2-2xa-8y+16+a^2} = 6 \\ y^2-(5a+2)\,y+6a^2+7a-3=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение системы.

42. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+2xa+a^2+6y+9} + \sqrt{x^2+y^2+2xa-10y+25+a^2} \\ y^2-(8a+4)\,y+15a^2+22a-5=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение системы.

43. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+2x+a^2-2ay+1} + \sqrt{x^2+y^2-6x-2ay+9+a^2} = 4 \\ x^2-(2a+1)\,x+a^2+a-2=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение системы.

44. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \log_{a^4} y = \left(x^2+5x+6\right)^6. \\ -x^2+y=5x+6 \end{cases}$$

имеет: 1) ровно два решения; 2) ровно четыре решения?

45. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \log_{a^6} y = \left(x^2-10x+9\right)^6, \\ y-x^2=9-10x \end{cases}$$

имеет: 1) ровно два решения; 2) ровно четыре решения?

46. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \log_{a^3} y = \left(x^2 - 3x\right)^2, \\ y = 3x - x^2 \end{cases}$$

имеет: 1) ноль решений; 2) ровно два решения;3) ровно три решения; 4) ровно четыре решения?

47. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \log_{a^5} y = \left(x^2 - 4x\right)^2, \\ y = 4x - x^2 \end{cases}$$

имеет нечетное число решений?

48. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \log_{a^7} 2y = \left(x^2 - 6x\right)^3, \\ y = 6x - x^2 \end{cases}$$

имеет не менее двух решений?

49. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |a|^{y^2} = \sqrt[7]{-4x^2 + 24x - 32}, \\ y = 4x^2 - 24x + 32 \end{cases}$$

имеет не менее двух решений?

50. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} a^{y^3} = \sqrt[11]{30x^2 - 240x + 450}, \\ 7y - 35x^2 + 280x - 525 = 0 \end{cases}$$

имеет не менее двух решений?

51. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |a|^{2x-y-1} = 2x + 3y - 7, \\ 4y - x = 6 \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

52. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} a^{2x+3y-5} = 10 - 4x - 6y, \\ y + x = 1 \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

53. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} a^{3x-5y^2-7} = 21 + 15y^2 - 9x, \\ 7x - 5y^2 = 13 \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

54. При каких целых значениях параметров a и b система имеет единственное решение?

$$\begin{cases} xyz + z = -a, \\ xyz^2 - z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

55. При каких значениях параметров a и b система имеет единственное решение?

$$\begin{cases} 2xyz + y = a, \\ 2xy^2z + y = b, \\ 4\left(1 - x^2\right) = y^2 + z^2 \end{cases}$$

56. При каких значениях параметров a и b система имеет единственное решение?

$$\begin{cases} xyz + x = a, \\ yx^2z + x = b, \\ 4\left(1 - x^2\right) = y^2 + z^2 \end{cases}$$

Ответы:

1. 1а) $a \neq \pm 4$; 1б) $x = \frac{a+5}{2a+8}; y = \frac{-a-8}{16-a^2}$; 1в) $a \in (-8; -5) \cup (4; +\infty)$; 1г) $a \in (-\infty; -8) \cup (-5; -4) \cup (-4; 4)$; 2) $a = -4$; 3) $a = 4$

2. 1а) $a \neq \pm 2$; 1б) $x = \frac{a^2+2a+4}{a+2}; y = \frac{-2a}{a+2}$; 1в) $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0)$; 1г) $a > 0$;2) $a = -2$; 3) $a = 2$.

3. 1а) $a \neq \pm 2$; 1б) $x = \frac{a-3}{a-2}; y = \frac{1}{a-2}$; 1в) $a > 3$; 1г) $a \in (-\infty; 2) \cup (2; 3)$; 2) $a = 2$; 3) $a = -2$.

4. $a = 2$. **5.** $a \in \{0; 2\}$. **6.** $a = 2$. **7.** $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. При $a \in (-1; 1) \cup (7; +\infty)$ одна общая точка; при $a \in (-1; 1)$ $x = \frac{13-a}{2}; y = 3x - 6 + a$; при $a > 7$ $x = \frac{1-a}{2}; y = -x + 6 + a$.

9. При $a = 1$ одна общая точка $x = -5, y = 8$; при $a = 9$ бесконечное множество точек $x \in [3; +\infty), y = 16$.

10. При $a = 8$ одна общая точка $x = 1, y = 5$. **11.** При $a > 16$.

12. 1) $a_{\min} = \frac{1}{2}$; 2) $a_{\min} = \frac{4}{3}$. **13.** $a_{\min} = 8$. **14.** $a_{\min} = 21$.

15. $a_{\max} = -21$.

16. $a_{\min} = 2 - \sqrt{2}$; $a_{\min}$ достигается в точке $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 2 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

17. При $a < -4$ общих точек нет; при $a = -4$ единственная общая точка $(2; -4)$; при $a > -4$ две общих точки $\left(3 - \sqrt{5+a}; a\right)$ и $\left(1 + \sqrt{5+a}; a\right)$.

18. При $a > 5$ общих точек нет; при $a = 5$ единственная общая точка $(1; 5)$; при $a \in [-4; 5)$ две общих точки $\left(1 - \sqrt{5-a}; a\right)$ и $\left(1 + \sqrt{5-a}; a\right)$; при $a < -4$ две общих точки $\left(1 - \sqrt{5-a}; a\right)$ и $\left(2 + \sqrt{-a}; a\right)$.

19. При $a > 5$ общих точек нет; при $a = 5$ единственная общая точка $(2; 5)$; при $a \in (3.5; 5)$ две общих точки $\left(2 \pm \sqrt{\frac{5-a}{2}}; a\right)$; при $a = 3.5$ три общих точки $\left(2 \pm \sqrt{\frac{5-a}{2}}; a\right)$ и $(0.5; a)$; при $a \in (3; 3,5)$ четыре общих точки $\left(2 \pm \sqrt{\frac{5-a}{2}}; a\right)$ и $\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3.5-a}{2}}; a\right)$; при $a = 3$ три общих точки $(0; 3), (1; 3)$ и $(3; 3)$; при $a \in (-\infty; 3)$ две общих точки $\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3.5-a}{2}}; a\right)$.

20. **21.** $a = 0.25$. **22.** $a = 0.25$. **23.** $a = 0.25$.

24. $\sqrt{34} - 2 \leqslant |a| \leqslant \sqrt{74} + 2$. **25.** $\sqrt{13} - 1 \leqslant |a| \leqslant 6$.

26. $\sqrt{5} - 1 \leqslant |a| \leqslant \sqrt{13} + 1$. **27.** $\frac{5}{6} \leqslant |a| \leqslant \frac{\sqrt{505}}{6}$; $a_{\min} = -\frac{\sqrt{505}}{6}$.

28. $\sqrt{37} \leqslant |a| \leqslant \sqrt{89}$; $a_{\min} = -\sqrt{89}$.
29. $3.5 \leqslant |a| \leqslant \sqrt{58.25}$; $a_{\min} = -\sqrt{58.25}$.
30. 1) При $a \in (-\infty;-2) \cup (2.5;+\infty)$ единственное решение $\left(\frac{6}{a};5\right)$; при $a \in (2;2.5]$ единственное решение $\left(\frac{2}{a-2};\frac{a+2}{a-2}\right)$; 2) При $a \in (-2;2]$; 3) При $a=-2$ $y=-2x-1$ $x \in (-\infty;-3]$.
31. 1) при $a \in (-\infty;-2)$ единственное решение $\left(\frac{4}{a};5\right)$; при $a \in \left[\frac{4}{3};2\right)$ два решения $\left(\frac{4}{a};5\right)$ и $\left(\frac{2}{a-2};\frac{-a-2}{a-2}\right)$; 2) при $a \in \left(-2;\frac{4}{3}\right)$; 3) при $=-2$ $y=-2x+1$ $x \in (-\infty;-2]$.
32. 1) При $a \in (-\infty;-3) \cup (2;+\infty)$ единственное решение $\left(\frac{6}{a};5\right)$; при $a \in [-3;-2)$ решение $\left(\frac{2}{a+2};\frac{a-2}{a+2}\right)$; 2) при $a \in (-2;2)$; 3) при $a=2$ y=2x-1, $x \in [3;+\infty)$.
33. $a \in (1;+\infty) \cup \left\{e^{\frac{-1}{e}}\right\}$. **34.** $a \in (1;+\infty) \cup \left\{e^{\frac{-1}{e}}\right\}$.
35. 1) При $a \in \left(0;\frac{1}{e}\right)$ система имеет шесть решений; 2) при $a \in \left\{\frac{1}{e}\right\} \cup \left(\sqrt[2401]{\left(\frac{53}{4}\right)^8};+\infty\right)$ система имеет четыре решения: 3) при $a = \sqrt[2401]{\left(\frac{53}{4}\right)^8}$ система имеет 3 решения; 4) при $a \in \left(\frac{1}{e};1\right) \cup \left(1;\sqrt[2401]{\left(\frac{53}{4}\right)^8}\right)$ система имеет 2 решения; 5) при $a<0$ или $a=1$ система не определена.
36. 1) При $|a| \in (0;1) \cup \left(1;\sqrt[256]{18^5}\right)$ - два решения; 2) при $|a| = \sqrt[256]{18^5}$ - три решение; 3) при $|a| \in \left(\sqrt[256]{18^5};+\infty\right)$ – четыре решения.
37. 1) При $a \in (0;1) \cup (1;\sqrt[2500]{50})$ – два решения; 2) при $a = \sqrt[2500]{50}$ – три решения; 3) при $a \in \left(\sqrt[2500]{50};e^{\frac{1}{2e}}\right)$ четыре решения; 4) при $a \in \left(e^{\frac{1}{2e}};+\infty\right)$ нет решений.
38. При $a \in \left(1-e^{\frac{1}{e}};2\right) \cup \left(2;1+e^{\frac{1}{e}}\right)$.
39. 1) При $a \in (0;1) \cup (1;2) \cup \left\{1+e^{\frac{1}{2e}};1-e^{\frac{1}{2e}}\right\}$ система имеет единственное решение; 2) $a \in \left(1-e^{\frac{1}{2e}};0\right) \cup \left(2;1+e^{\frac{1}{2e}}\right)$ система имеет два решения.
40. При $a \in (\pi;\pi+1) \cup (\pi-1;\pi) \cup \left\{\pi \pm e^{\frac{1}{4e}}\right\}$ – одно решение;

при $a \in \left(\pi+1; \pi+e^{\frac{1}{4e}}\right) \cup \left(\pi-e^{\frac{1}{4e}}; \pi-1\right)$ – два решения.

41. При $a \in \left[-2.5; -\frac{1}{3}\right)$ – $y = 2a+3, x = a$; при $a \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right]$ $y = 3a-1, x = a$.

42. При $a \in \left[0; \frac{6}{5}\right]$ – $y = 5a-1; x = -a$; при $a \in \left[-\frac{8}{3}; -\frac{2}{5}\right]$ $y = 3a+5; x = -a$.

43. При $a \in [-3; 0]$ $y = 3; x = a+2$; при $a \in [1; 4]$ – $y = 3; x = a-1$

44. При $a \in (-1; 0) \cup (0; 1) \cup \left\{e^{\frac{1}{24e}}; -e^{\frac{1}{24e}}\right\}$ – два решения; при $a \in \left(-e^{\frac{1}{24e}}; -1\right) \cup \left(1; e^{\frac{1}{24e}}\right)$ – четыре решения

. **45.** При $a \in (-1; 0) \cup (0; 1) \cup \left\{e^{\frac{1}{36e}}; -e^{\frac{1}{36e}}\right\}$ – два решения; при $a \in \left(-e^{\frac{1}{36e}}; -1\right) \cup \left(1; e^{\frac{1}{36e}}\right)$ четыре решения.

46. При $a > e^{\frac{1}{6e}}$ нет решений; при $a \in (0; 1) \cup \left\{e^{\frac{1}{6e}}\right\}$ – два решения; при $a = \sqrt[243]{(2.25)^{16}}$ – три решения; при $a \in \left(\sqrt[243]{(2.25)^{16}}; e^{\frac{1}{6e}}\right)$ – четыре решения.

47. При $a = \sqrt[80]{4}$ – три решения.

48. При $a \in (1; +\infty)$ – два решения; при $a \in \left(e^{-\frac{8}{21e}}; 1\right)$ не менее двух решений.

49. При $a \in \left[-e^{\frac{1}{10e}}; 0\right) \cup \left(0; e^{\frac{1}{10e}}\right]$ – не менее двух решений.

50. При $a \in \left(0; e^{\frac{72}{11e}}\right]$ – не менее двух решений.

51. При $a \in \left(-e^{\frac{1}{e}}; -1\right) \cup \left(1; e^{\frac{1}{e}}\right)$ - два решения.

52. При $a \in \left(e^{\frac{-2}{e}}; 1\right)$ – два решения.

53. При $a \in \left[\sqrt[10]{\left(\frac{7}{30}\right)^7}; 1\right)$ два решения.

54. При $a = -2$, $b = -2$ – единственное решение; при $a = b = 2$ система имеет пять решений.

55. При $a = -2$, $b = -2$ – единственное решение; при $a = b = 2$ система имеет пять решений.

56. При $a = -1$, $b = -1$ – единственное решение; при $a = 1$, $b = 1$ система имеет единственное решение.

Задача С6.

1. Решите уравнение $5^x - 3^y = 2$ в целых числах.

2. Найдите все простые p, такие, что а)$p^2 + 6$; $p^2 - 6$ – тоже простые; б) $p^4 - 6$ – тоже простое; в) $p^3 + 6$; $p^3 - 6$ – тоже простые; г) $p^2 - 2$; $2p^2 - 1$; $3p^2 + 4$ – тоже простые.

3. Известно, что $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ и связаны соотношением $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Верно ли, что $a + b + c + d$ простое число?

4. Решите уравнение $2^x - 15 = y^2$ в целых числах.

5. Найдите целочисленные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 14, \\ x + yz = 19. \end{cases}$$

6. Сколько натуральных трехзначных чисел n обладают тем свойством, что первая и последняя цифра числа n^2 равна единице?

7. Сколько раз нужно выписать число а) 1984; б) 2010, чтобы получилось число, делящееся на 99?

8. Найдите все цифры a и b, такие, что $3baab6ba$ нацело делится на 99.

9. Найдите все целочисленные решения системы

$$\frac{5}{3}t = 2k + 1 = \frac{3l + 1}{2} = 6m - 1; \qquad t, k, l, m \in \{0; 1; 2; 3; ...\}.$$

10. Решите в натуральных числах уравнение

$$(x_1^2 + 1) \cdot (x_2^2 + 2^2) \cdot \ldots \cdot (x_{2011}^2 + 2011^2) = 2^{2011} \cdot 2011! \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2011}$$

11. Найдите все тройки целых чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющих неравенству

$$\log_2(2x + 3y - 6z + 3) + \log_2(3x - 5y + 2z - 2) +$$

$$+ \log_2(2y + 4z - 5x + 2) > z^2 - 9z + 17.$$

Ответы:

1. $x = 1$; $y = 1$. **2.** а) 5; б) 5; в) 7; г) 3; 7.

3. Нет. $a + b + c + d$ составное число. **4.** $(6; \pm 7)$; $(4; \pm 1)$.

5. $(19; 0; -5)$, $(17; -2; -1)$, $(7; 4; 3)$, $(5; 2; 7)$, $(19; -5; 0)$, $(17; -1; -2)$, $(7; 3; 4)$, $(5; 7; 2)$.

6. 22 числа. **7.** а) $99 \cdot k$; б) $33 \cdot k$. **8.** $(0; 3)$, $(3; 6)$, $(6; 9)$.

9. $t = -18p - 105$; $k = -15p - 88$; $l = -20p - 117$; $m = -5p - 29$; $p \in \{-6; -7; -8; ....\}$.

10. $\{1; 2; ..., 2011\}$. **11.** $(5, 4, 4)$.

Отбор корней в тригонометрических уравнениях

С.В.Богатырев

Тригонометрическая окружность

Сначала вспомним о том, что такое числовая прямая. Числовая прямая – это прямая, к которой добавлены еще три вещи. Первое - это направление движения. От любой точки прямой можно двигаться по ней в двух направлениях. Мы выбираем одно из этих двух направлений, которое и считаем положительным. Второе - это выбор одной точки на прямой, которую считаем началом и нумеруем числом 0. Третье – это выбор масштаба, то есть мы выбираем отрезок, длину которого считаем равным 1. Заметим, что этих трех вещей достаточно, чтобы каждую точку прямой занумеровать каким-либо числом.

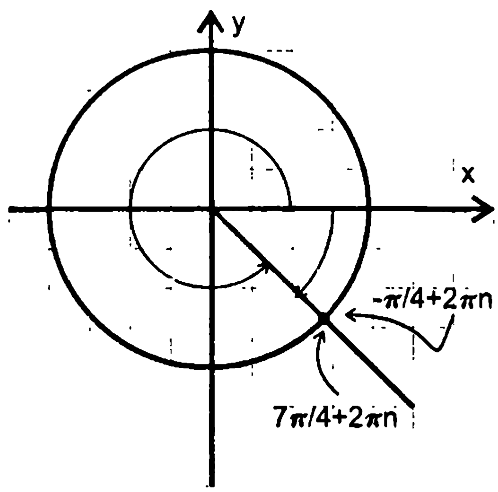
Для того, чтобы построить тригонометрическую окружность, надо взять окружность единичного радиуса, поместить ее в обычную прямоугольную систему координат xoy и «намотать» на нее числовую прямую (примерно также, как наматывается длинная нитка на катушку). Особенности «намотки» следующие. Перед началом «намотки» надо разместить числовую прямую так, что точка 0 числовой прямой попала в точку с координатами $(1;0)$ системы координат xoy, а положительное направление движения по числовой прямой совпадало с положительным направлением оси oy. После этого и можно производить «намотку».

Тогда все особенности числовой прямой будут унаследованы тригонометрической окружностью. Разберемся с этими особенностями подробнее.

Во-первых, у тригонометрической окружности есть начало, точнее точка с координатами $(1;0)$ считается начальной точкой. Во-вторых, она ориентирована. От начальной точки можно двигаться в двух направлениях: по часовой стрелке и против. Направление движения против часовой стрелки считается положительным. В-третьих, каждой точке тригонометрической окружности будет сопоставляться бесконечное множество чисел. Эти числа мы будем называть углами (и этому есть оправдание).

Т.о. каждая точка окружности служит изображением для бесконечного множества углов. Наконец, если мы знаем один такой угол, то все остальные углы можно получить с помощью прибавления число 2π (это длина окружности единичного радиуса). Т.о. любая точка окружности служит изображением множества углов вида $\varphi + 2\pi n$, где φ какой-то один угол (все равно какой), а n пробегает по множеству целых чисел $\mathbb{Z}$.

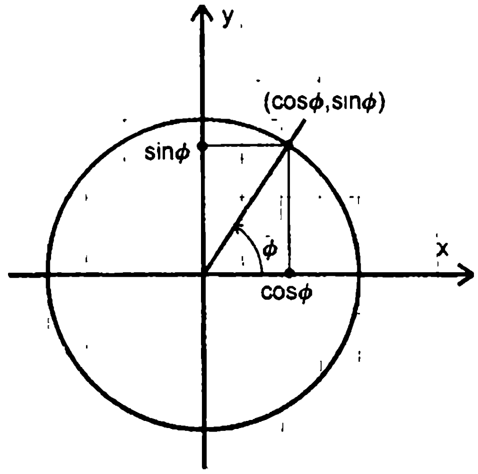
Угол φ можно называть представителем множества углов, описывающих некоторую точку окружности. В качестве представителя точки окружности обычно (но не обязательно) выбирают угол из промежутка $[0; 2\pi)$, или из промежутка $(-2\pi; 0]$.



В качестве примера возьмем тригонометрическую окружность и проведем луч, выходящий из начала координат под углом $-\frac{\pi}{4}$ с осью ox Угол отсчитывается от положительного направления оси ox поворотом луча на угол $\frac{\pi}{4}$ в отрицательном направлении. Точка пересечения этого луча с тригонометрической окружность служит изображением множества углов $\left\{-\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$. Эту же точку можно описать также с помощью множества углов $\left\{\frac{7\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$. Конечно, индексы n в этих двух описаниях отличаются друг от друга, но такой неаккуратностью мы будем пренебрегать.

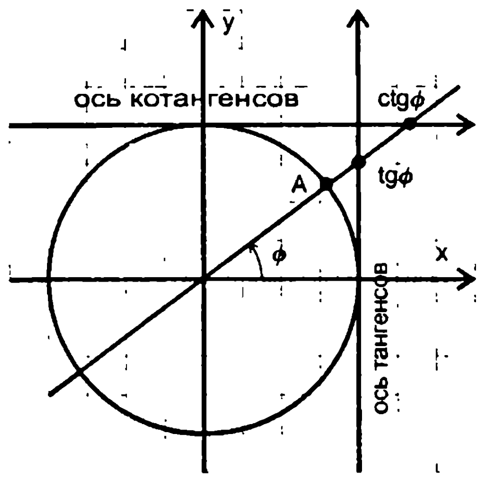
Тригонометрические функции

Как определяются функции синус, косинус. тангенс и котангенс? Известно, что для определения функции надо указать способ, с помощью которого по значению аргумента вычисляется значение функции.



Для синуса и косинуса этот способ вычисления значения функции состоит в следующем. Пусть дан угол φ. На тригонометрической окружности надо взять точку, которая служит изображением этого угла φ (обозначим эту точку буквой A). В декартовой системе координат xoy эта точка имеет координаты $(\cos\varphi; \sin\varphi)$. Т.о. для вычисления $\cos\varphi$ надо точку A спроектировать на горизонтальную ось ox и найти координату проекции, а для вычисления $\sin\varphi$ надо A спроектировать на вертикальную ось oy и найти координату проекции. Стоит запомнить, что значения косинуса откладываются на горизонтальной оси, а значения синуса на вертикальной. Поэтому горизонтальную ось будем называть осью косинусов, а вертикальную ось – осью синусов.

Из этого определения, кстати, сразу вытекает, что синус и косинус является периодическими функциями с наименьшим периодом 2π. Отсюда также следует, что косинус положителен в первой и четвертой четвертях, а синус в первой и второй.



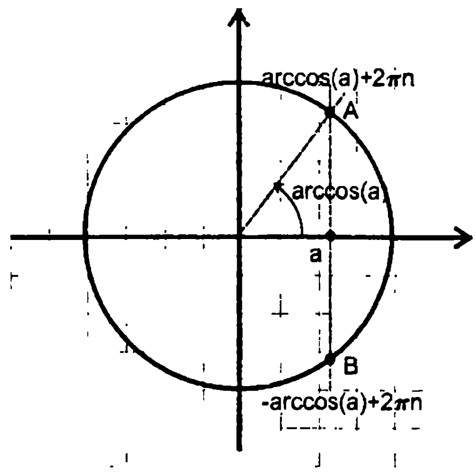
Для определения тангенса надо к тригонометрической окружности добавить ось тангенсов (см. рисунок). Это числовая ось, размещенная на плоскости xoy так, чтобы она была касательной к тригонометрической окружности в точке $(1;0)$ (т.е. вертикально). При этом начальная точка этой оси должна попасть в точку $(1;0)$, а положительное направление у этой оси должно быть таким же, как у вертикальной оси oy. Для определения значения $\operatorname{tg}\varphi$ надо через центр тригонометрической окружности и точку A на тригонометрической окружности провести прямую. Точка пересечения этой прямой и оси тангенсов и будет на оси тангенсов иметь координату $\operatorname{tg}\varphi$.

Обратите внимание на то, что на построенная нами прямая пересекает тригонометрическую окружность еще в одной точке с углом $\varphi+\pi$. Из определения тангенса следует, что значения тангенса на углах φ и $\varphi+\pi$ совпадают. Таким образом наименьшим периодом тангенса будет число π. Из приведенного определения также следует, что тангенс положителен в первой и третьей четвертях и отрицателен – во второй и четвертой.

Функция котангенс определяет аналогичным образом. Надо только использовать ось котангенсов (см. рисунок).

Элементарные тригонометрические уравнения

Начнем с с уравнения $\cos\varphi = a$. Сначала найдем изображение всех решений этого уравнения. Поскольку значения косинуса откладываются на горизонтальной оси, то надо точку a отложить на горизонтальной оси. Потом надо найти все точки тригонометрической окружности, которые проектируются в точку a. Для этого надо через a провести вертикальную прямую до пересечения с тригонометрической окружностью.

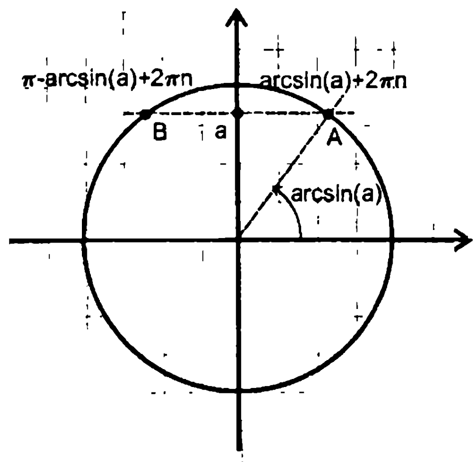


Если $a < -1$ или $a > 1$, то точек пересечения нет и, следовательно, уравнение $\cos\varphi = a$ не будет иметь решений. Если $a = -1$, то точка пересечения одна. Эта точка будет изображением для углов $\{\pi + 2\pi n\}$. Следовательно, решением уравнения $\cos\varphi = -1$ будет группа чисел $\varphi = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Аналогичным образом можно показать, что множеством решений уравнения $\cos\varphi = 1$ будут числа вида $\varphi = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

В случае $-1 < a < 1$ мы получим две точки пересечения вертикальной прямой с тригонометрической окружностью. Одна точка лежит на верхней полуокружности (обозначим ее через A), вторая – на нижней (обозначим ее через B).

Таким образом, в этом случае все решения уравнения $\cos\varphi = a$ разбиваются на две группы. Для описания каждой из групп надо найти представителя группы (т.е. какой-нибудь угол, попадающий в группу решений). В общем случае нет возможности найти выражение для какого-нибудь представителя группы решений. Поэтому принято вводить обозначение для этого представителя. Через $\arccos a$ обозначается решение уравнения $\cos\varphi = a$, попадающее в промежуток $[0;\pi]$.

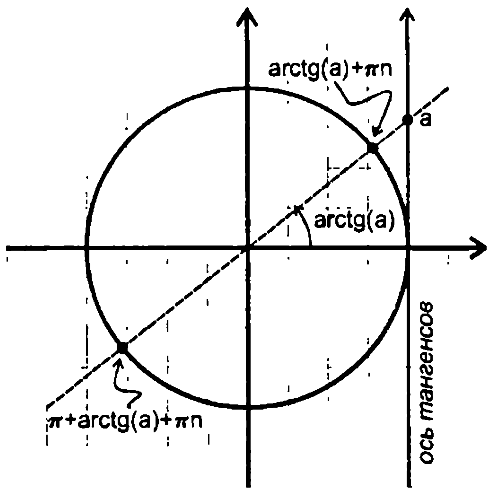
Т.о. точка A тригонометрической окружности изображает все решения вида $\arccos a+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда нижняя точка B будет изображением решений вида $-\arccos a+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Эти две группы решений можно записать вместе $\pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Но все-таки стоит помнить, что это запись двух групп решений.



Аналогичным образом можно исследовать уравнение $\sin\varphi = a$. Для изображения решений этого уравнения надо отметить точку a на вертикальной оси, а потом через эту точку провести горизонтальную прямую до пересечения с тригонометрической окружностью. При $a < -1$ и $a > 1$ точек пересечения нет. Это означает, что для этих значений a уравнение $\sin\varphi = a$ не имеет решений. При $a = -1$ имеется одна точка, изображающая решения уравнения $\sin\varphi = -1$. Эта точка будет изображением для множества углов $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Это решения уравнения $\sin\varphi = -1$. Аналогичным образом находится, что множество решений уравнения $\sin\varphi = 1$ может быть описано как $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

В случае $-1 < a < 1$ горизонтальная прямая, проходящая через точку a на вертикальной оси, пересекает тригонометрическую окружность в двух точках, одна из них находится на левой полуокружности (точка B), вторая – на правой (точка A). Следовательно, в этом случае мы имеем две группы решений уравнения $\sin\varphi = a$. Одна группа решений (соответствующая точке

A) может быть описана выражением $\arcsin a + 2\pi n$ где $\arcsin a$ обозначение для единственного решения уравнения $\sin\varphi = a$ из промежутка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.



Вторая группа (соответствующая точке B) может быть описана выражением $\pi - \arcsin a + 2\pi n$. Существует выражение, описывающее одновременно обе группы решений. Это выражение $(-1)^n \arcsin a + \pi n$. При четных значения n из этого выражения получается одна группа решений, при нечетных – другая.

Рассмотрим уравнение $\operatorname{tg}\varphi = a$. Для построения всех решений этого уравнения надо на оси тангенсов отложить точку с координатой a и провести через эту точку и начало координат прямую. Эта прямая для любого значения a пересечет тригонометрическую окружность в двух точках. Таким образом уравнение $\operatorname{tg}\varphi = a$ имеет две группы решений при любом значении a. Первая группа решений может быть описана выражением $\operatorname{arctg} a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, где $\operatorname{arctg} a$ является обозначением единственного решения уравнения $\operatorname{tg}\varphi = a$ из интервала $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, а вторая группа решений может быть описана выражением $\pi + \operatorname{arctg} a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Так что обе группы решений могут быть описаны одним выражением $\operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

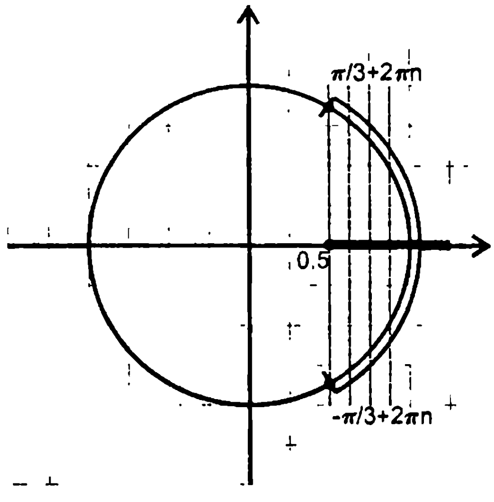
Элементарное уравнение $\operatorname{ctg}\varphi = a$ рассмотрите самостоятельно.

Элементарные тригонометрические неравенства

Здесь для простоты ограничимся конкретными примерами.

Пример 1. Решим неравенство $\cos\varphi \geqslant \frac{1}{2}$.
Для этого на оси косинусов заштрихуем область $x \geqslant \frac{1}{2}$. Через каждую точку этой области проведем вертикальную прямую до пересечения с тригонометрической окружностью. На тригонометрической окружности все эти точки пересечения составят

дугу (см. рисунок). Эта дуга будет изображением всех решений неравенства $\cos\varphi \geqslant \frac{1}{2}$.

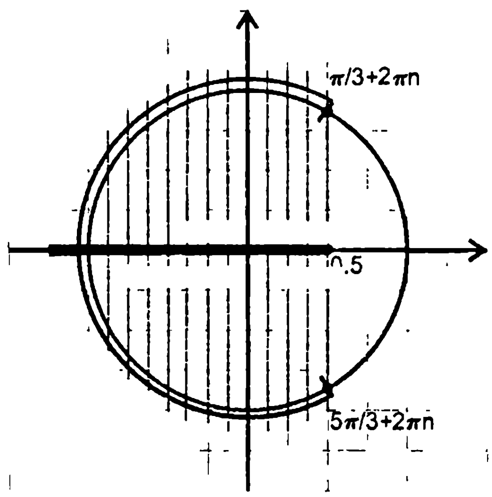


Один конец этой дуги являются изображением для множества углов $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, а второй – для множества углов $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. Понятно, что множество решений неравенства $\cos\varphi \geqslant \frac{1}{2}$ представляет собой объединение промежутков

$$\left\{\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right],\ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Это правильный ответ, но стратегия построения этого ответа неверна. Правильно было бы сначала выделить дугу, изображенную на приведенном рисунке, потом – найти подходящие значения для концов этой дуги (надо чтобы при прохождении этой дуги в положительном направлении угол изменялся от меньшего значения к большему значению, для нашего примера это значения $-\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$), и только потом можно описать все дуги, добавляя к выбранной дуге период $2\pi n$.

Пример 2. Решим теперь неравенство $\cos\varphi \leqslant \frac{1}{2}$.
На оси ox заштрихуем область $x \leqslant \frac{1}{2}$. Спроектируем все точки этой области на тригонометрическую окружность параллельно оси oy и получим дугу, изображенную ниже на рисунке. Теперь надо выбрать какие-то угловые значения для описания концов этой дуги.

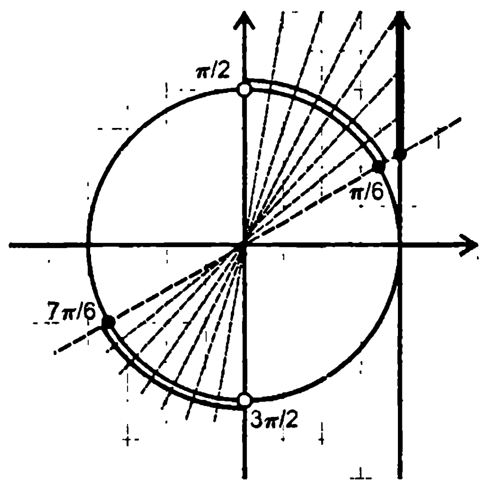


Важный вопрос: какие значения выбирать? Естественный выбор значений $\frac{\pi}{3}$ и $-\frac{\pi}{3}$ не подходит. Дело в том, что тригонометрическая окружность ориентирована, т.е. на ней задано положительное направление движения (это движение против часовой стрелки). Поэтому при прохождении по выбранной дуге в положительном направлении один конец дуги будет начальной точкой, а второй – конечной точкой. При нашем «естественном» выборе углов для концов дуги окажется, что начальная точка будет точкой $\frac{\pi}{3}$, а конечная точка будет точкой $-\frac{\pi}{3}$. Окажется, что начальная точка будет больше конечной.

Конечная точка является изображением для множества значений $\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Так что для исправления ситуации надо из этого множества значений выбрать другого представителя. Ясно, что подходит значение $\frac{5\pi}{3}$. Так что одним из решений неравенства $\cos\varphi \leqslant \frac{1}{2}$ будет дуга $[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}]$, а все остальные решения можно будет получить из этой дуги прибавлением периода $2\pi n$. (См. рисунок.)

Элементарные неравенства для синусов решаются аналогичным образом. Осталось рассмотреть какой-нибудь пример для тангенсов.

Пример 3. Решим неравенство $\operatorname{tg}\varphi \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.



Это неравенство можно решить с помощью такой же схемы, которая использовалась в предыдущих примерах. Т.е. на оси тангенсов надо выбрать промежуток $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \infty\right)$. Далее через точки этого промежутка и начало координат надо проводить прямые и искать точки пересечения этих прямых с тригонометрической окружностью. Эти точки пересечения будут образовывать две дуги на тригонометрической окружности. Эти дуги будут изображениями всех решений рассматриваемого неравенства. После этого останется эти дуги описать.

Опишем концы дуг на промежутке $[0; 2\pi)$. Понятно, что концы дуг задаются углами $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$ $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$. При этом углы $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{7\pi}{6}$ входят в решение (поскольку неравенство нестрогое), а углы $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$ – не входят (поскольку в этих точках тангенс не существует). Таким образом на периоде $[0; 2\pi)$ получаем следующее решение $[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2})$. Осталось к этому решению добавить период $2\pi n$.

Тогда получим

$$\left\{\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left[\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}\right\}$$

Конечно, это решение можно описать и по-другому. Можно взять промежуток $[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2})$ и прибавить к нему полупериод πn.

Отбор корней

Мы рассмотрим здесь несколько примеров решения тригонометрических уравнений, в которых приходится отбирать корни в соответствии с некоторым набором условий. Сами условия могут возникать как ОДЗ уравнения, или из-за выбранного метода решения. Поскольку при отборе корней будет использоваться тригонометрическая окружность. то приходится требовать, чтобы условия отбора корней описывались с помощью функций, для которых число 2π будет периодом. Это требование не слишком обременительно, так как с помощью замены переменной всегда можно свести решаемую задачу к случаю, когда в ней участвуют только функции периода 2π.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{25x^2+50x\pi-24\pi^2}{\sqrt{\cos 2x+\sin x}}=0 \tag{1}$$

Решение. Это уравнение равносильно системе состоящей из неравенства и уравнения

$$\begin{cases}\cos 2x+\sin x>0,\\ 25x^2+50x\pi-24\pi^2=0\end{cases} \tag{2}$$

Термин «равносильно» означает, что уравнение (1) и система (2) имеют одинаковые решения. Неравенство в (2) описывает ОДЗ уравнения (1). Обычно ОДЗ записывают отдельно и потом проверяют найденные корни на попадание в ОДЗ. Но техника равносильных преобразований мне нравится больше. Дело в том, что теперь можно забыть про (1) и решать систему (2).

Для решения системы (2) надо решить уравнение из (2) и отобрать корни в силу неравенства из (2). Уравнение из (2) решается легко. Вот его корни

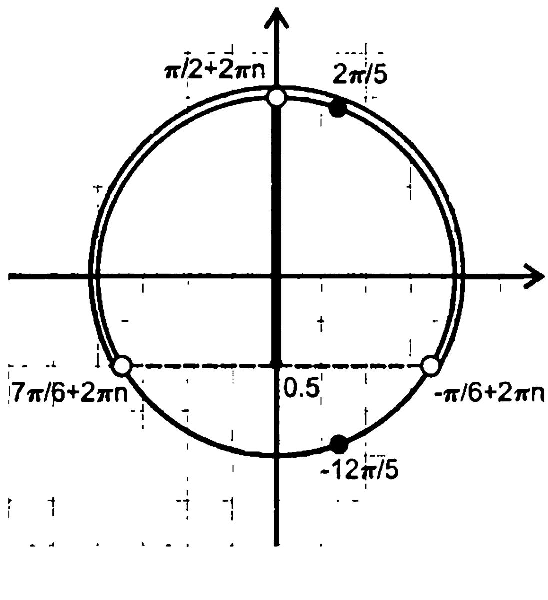
$$x_1 = \frac{2}{5}\pi, \qquad x_2 = -\frac{12}{5}\pi. \tag{3}$$

Дальше надо проверять, будут ли эти корни удовлетворять неравенству из (2). Прямая подстановка этих корней в неравенство из (2) ничего не даст, поскольку мы не сможем вычислить значения $\cos 2x$ и $\sin x$ на этих корнях. Поэтому решим неравенство из (2)!

Прежде всего перепишем неравенство из (2) в виде $2\sin^2 x - \sin x - 1 < 0$. Сделаем замену переменной $y = \sin x$. Тогда получим квадратное неравенство $2y^2 - y - 1 < 0$. Его решение может быть описано как промежуток $y \in (-\frac{1}{2}; 1)$, но нам удобнее это решение записать в виде двухстороннего неравенства $-\frac{1}{2} < y < 1$. Возвращаясь от y к старой переменной x получим, что неравенство из (2) эквивалентно двойному неравенству $-\frac{1}{2} < \sin x < 1$.

Это двойное неравенство легко решить с помощью тригонометрической окружности (см. рисунок). Из этого рисунка видно, что решение неравенства из (2) можно записать в виде

$$\left\{\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$



Но на самом деле, нам надо иметь не запись решения, а изображение решения, приведенное на рисунке. Этого достаточно для выполнения отбора корней (3).

Рассмотрим корень $x_1 = \frac{2}{5}\pi$. Он лежит в первой четверти (см. рисунок), так что попадает в ОДЗ уравнения (1) и значит будет решением этого уравнения. Рассмотрим теперь корень $x_2 =$

$-\frac{12}{5}\pi$. Найдем и ему место на тригонометрической окружности. Представим $-\frac{12}{5}\pi = -2\pi - \frac{2}{5}\pi$. Угол $-\frac{2}{5}\pi$ лежит в четвертой четверти и для него справедливо неравенство $-\frac{2}{5}\pi < -\frac{\pi}{6}$. Поэтому $-\frac{2}{5}\pi$ не попадает в ОДЗ уравнения (1). Поэтому корень $x_2 = -\frac{12}{5}\pi$ не будет решением уравнения (1).

Ответ: $\frac{2}{5}\pi$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{2\operatorname{tg}^2 x - 7\operatorname{tg} x + 6}{\sqrt{2\cos 2x + 1}} = 0. \tag{4}$$

Решение. Уравнение (4) равносильно системе

$$\begin{cases} 2\cos 2x + 1 > 0, \\ 2\operatorname{tg}^2 x - 7\operatorname{tg} x + 6 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Для решения системы (5) надо решить уравнение из этой системы и отобрать те корни, которые удовлетворяют неравенству из (5). Уравнение из (5) является квадратным относительно $\operatorname{tg} x$. Решая его относительно $\operatorname{tg} x$, получим

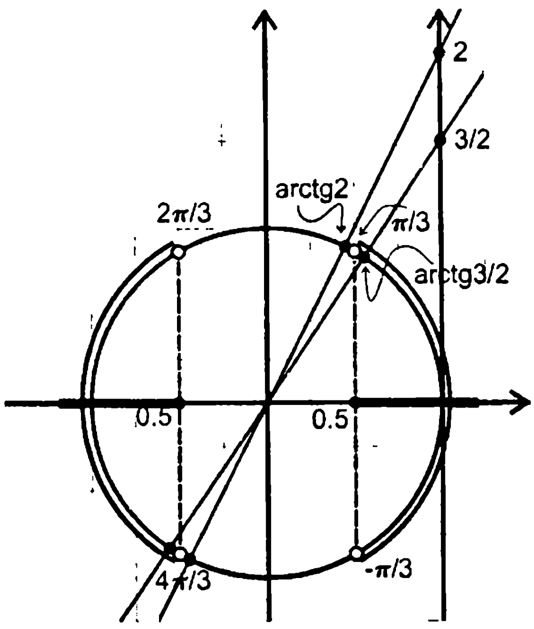
$$\operatorname{tg} x = 2, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x = \frac{3}{2} \tag{6}$$

Теперь перейдем к неравенству из (5). Его можно переписать в виде

$$\cos^2 x > \frac{1}{4}. \tag{7}$$

Заметим, что этого достаточно, чтобы произвести отбор корней для уравнений (6). В самом деле, поскольку $\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, то для корней уравнения $\operatorname{tg} x = 2$ получим $\cos^2 x = \frac{1}{5}$. Отсюда следует, что корни уравнения $\operatorname{tg} x = 2$ не будут удовлетворять условию (7) и поэтому не будут решением системы (5). Для корней уравнения $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$ получим $\cos^2 x = \frac{4}{13}$. Так как $\frac{4}{13} > \frac{1}{4}$, то корни уравнения $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$ будут решениями системы (5) и, следовательно, уравнения (4). Итак, мы получили

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.



Проиллюстрируем это решение уравнения (4) с помощью тригонометрической окружности. Прежде всего найдем изображение решений неравенства (7) на тригонометрической окружности. Для этого перепишем (7) в виде $|\cos x| > \frac{1}{2}$. Это неравенство можно переписать в виде двух неравенств $\cos x < -\frac{1}{2}$ или $\cos x > \frac{1}{2}$. На приведенном здесь рисунке приведено изображение решений этих неравенств. На периоде (т.е. на отрезке длиной 2π) это две дуги $(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3})$ и $(\frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi)$. Напомним, что остальные дуги можно получить с помощью добавления периода $2\pi n$. Таким образом мы получаем следующее описание ОДЗ уравнения (4)

$$\left\{\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{2}{3} + 2\pi n\pi; \frac{4}{3}\pi + 2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Изображение решений уравнений (6) можно получить, если мы проведем две прямые через точки 2 и $\frac{3}{2}$ на оси тангенсов и начало координат. Точки пересечения этих прямых с тригонометрической окружностью будут изображением решений уравнений (6). На приведенном рисунке видно, что прямая, проходящая через точку 2. не пересекает дуги, изображающие ОДЗ, а прямая, проходящая через точку $\frac{3}{2}$, - пересекает. Таким образом только решения уравнения $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$ попадают в ОДЗ. Мы снова приходим к найденному выше решению.

Для того, чтобы понять, какая из прямых пересекает дуги, изображающие ОДЗ, а какая – не пересекает, достаточно было бы провести еще одну прямую через точки $\frac{4}{3}\pi$ и $\frac{1}{3}\pi$, являющиеся концами дуг ОДЗ. Эта вспомогательная прямая пересекает ось тангенсов в точке $\sqrt{3}$ и разделяет точки 2 и $\frac{3}{2}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{2\sin 2x + 1}{\sqrt{\sin x + \cos x}} = 0. \tag{8}$$

Решение. Уравнение (8) равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x + \cos x > 0, \\ 2\sin 2x + 1 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

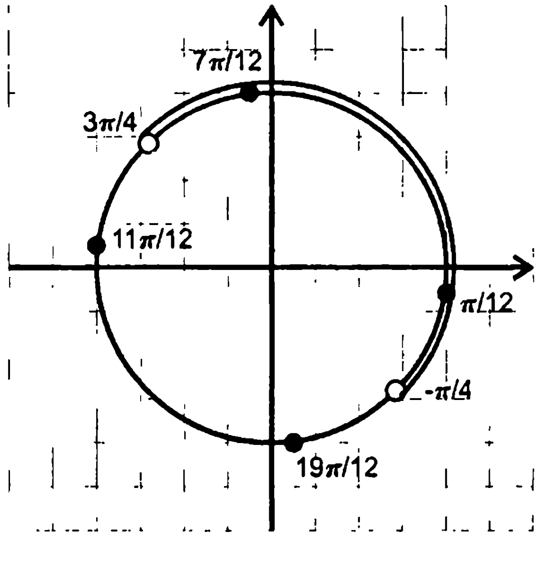
Уравнение из (9) нетрудно решить

$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Если мы хотим «нарисовать» эти решения на тригонометрической окружности, то их надо разбить на четыре группы

$$-\frac{\pi}{12}+2\pi k, \quad \frac{7}{12}\pi+2\pi k, \quad \frac{11}{12}\pi+2\pi k, \quad \frac{19}{12}\pi+2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Чтобы получить эти четыре группы решений можно начать вычислять значения решений (10) при $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ и отмечать найденные углы на тригонометрической окружности. На тригонометрической окружности тогда появятся четыре точки, подписанные выражениями из (11). Можно также разбить множество всех целых чисел $\mathbb{Z}$ на четыре группы $\{4k\}$, $\{4k+1\}$, $\{4k+2\}$, $\{4k+3\}$. Этим четырем группам чисел и соответствует разбиение всех решений (10) на группы (11).



Теперь рассмотрим неравенство из (9). Умножая обе части неравенства на $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и сворачивая левую часть по формуле синуса суммы двух углов, приведем это неравенство к виду

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) > 0. \tag{12}$$

Для отбора корней этого достаточно. В самом деле, возьмем первую группу корней из (11). Подставим сразу всю группу корней в (12). Это можно сделать, так как $2\pi k$ является периодом синуса и его значения будут одинаковы на каждом корне из этой группы. Так что достаточно подставить в (12) только какого-нибудь представителя группы, например $-\frac{\pi}{12}$. Поскольку угол $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}$ лежит в первой четверти, где синус положителен, то на первой группе корней (11) неравенство (12) будет верным. Аналогичным образом проверяется, что вторая группа корней также удовлетворяет этому неравенству, а третья и четвертая – не удовлетворяют. Таким образом приходим к ответу

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{12}+2\pi k,\ \frac{7}{12}\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

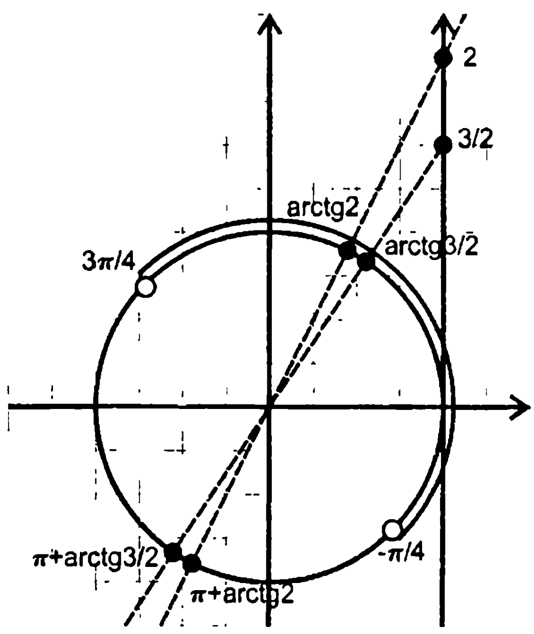
Для геометрической иллюстрации этой задачи решим неравенство (12). Его можно решить на периоде (то есть на каком-нибудь отрезке длиной 2π), а потом добавить период $2\pi n$. Легко получаем

$$0<x+\frac{\pi}{4}<\pi \iff -\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}.$$

А теперь приведем рисунок (см. рисунок выше), на котором будет изображено ОДЗ уравнения (8) и четыре группы решений (11). Видно, что в ОДЗ попадают только первая и вторая группа решений из (11).

Пример 4. Решить уравнение

$$\frac{2\operatorname{tg}^2 x-7\operatorname{tg} x+6}{\sqrt{\sin x+\cos x}}=0. \qquad (13)$$



Решение. Уравнение (13) равносильно системе

$$\begin{cases}\sin x+\cos x>0,\\ 2\operatorname{tg}^2 x-7\operatorname{tg} x+6=0.\end{cases} \qquad (14)$$

Неравенство из (14) мы решили при рассмотрении задачи 3, а уравнение из (14) мы решили в задаче (2). Так что (14) мы можем переписать в виде системы, состоящей из решений неравенства и уравнения из (14)

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi n, \ \operatorname{arctg} 2 + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{15}$$

Приведем рисунок, на котором изобразим ОДЗ из (15) и решения из (15). Здесь рисунка достаточно для отбора корней. Из рисунка видно, что все корни уравнения из (15) разбиваются на четыре группы

$$\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+2\pi n, \ \operatorname{arctg} 2+2\pi n, \ \pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+2\pi n, \ \pi+\operatorname{arctg} 2+2\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \tag{16}$$

Первые две группы корней в (16) попадают в ОДЗ, а вторые две группы корней не попадают. Т.о. получаем

Ответ: $\{\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + 2\pi n, \ \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}\}$

Пример 5. Решить уравнение

$$\frac{\sin x - 3\cos x}{\sqrt{2\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 1}} = 0. \tag{17}$$

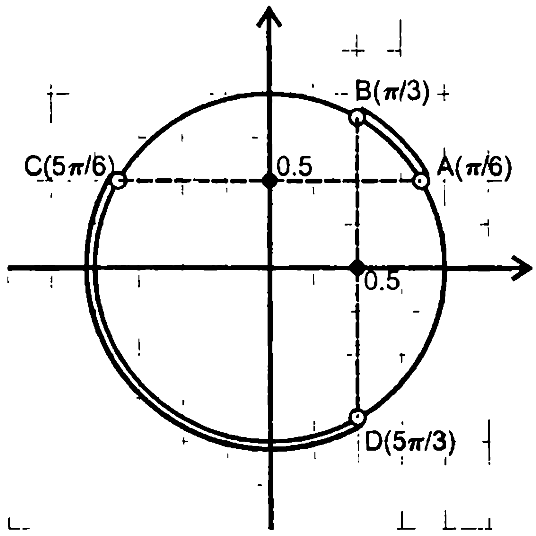
Решение. Уравнение (17) равносильно системе

$$\begin{cases} 2\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 1 > 0, \\ \sin x - 3\cos x = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Решим неравенство из (18). Его можно переписать в виде неравенства $(2\sin x - 1)(2\cos x - 1) > 0$. Левая часть этого неравенства обращается в ноль на решениях следующих двух уравнений $\sin x = \frac{1}{2}$ и $\cos x = \frac{1}{2}$. Решения этих уравнений могут быть изображены на тригонометрической окружности четырьмя точками A, B, C и D (см. рисунок).

Эти четыре точки разбивают тригонометрическую окружность на четыре дуги. На каждой из этих дуг левая часть неравенства из (18) сохраняет знак. Осталось только выбрать дуги, в которых знак положителен. Для определения знака достаточно посчитать значение выражения $(2\sin x-1)(2\cos x-1)$ в какой-нибудь пробной точке. Например $x=0$ принадлежит дуге DA. Легко видим, что $(2\sin x-1)(2\cos x-1)|_{x=0}=-1$. Т.о. на дуге DA выражение $(2\sin x-1)(2\cos x-1)$ отрицательно. Тогда на дугах AB и CD это выражение положительно. Т.о. решением неравенства из (18) будет объединение двух дуг AB и CD.

Осталось описать концы этих дуг, то есть точки A, B, C и D. Правильный выбор таков: $A=\frac{\pi}{6}$, $B=\frac{\pi}{3}$, $C=\frac{5\pi}{6}$ и $D=\frac{5\pi}{3}$.



Теперь рассмотрим уравнение из (18). Его можно переписать в виде элементарного уравнения $\operatorname{tg} x = 3$. Его решение могут быть разбиты на две группы $x=\operatorname{arctg}3+\pi n$ и $x=\pi+\operatorname{arctg}3+\pi n$. Угол $\operatorname{arctg}3$ лежит в первой четверти. Поскольку $3>\sqrt{3}$, то $\operatorname{arctg}3>\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$. Т.о. угол $\operatorname{arctg}3$ лежит на дуге BC. Следовательно, решения $\operatorname{arctg}3+\pi n$ не попадают в ОДЗ уравнения (17). Вторая группа решений $x=\pi+\operatorname{arctg}3+\pi n$ лежит в третьей четверти и, следовательно, попадают в ОДЗ уравнения (17).

Ответ: $\{\pi+\operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\}$.

Исследование уравнений и систем уравнений с параметром (С5)

А.А. Максютин

В демонстрационной версии КИМов ЕГЭ по математике 2011 года и в многочисленных тренировочных материалах для подготовки к ЕГЭ, изданных ФИПИ, в качестве С5 предлагается система уравнений с параметром или какая-либо задача с параметром. Ниже предложены решения максимально широкого спектра задач указанного типа. Использованы как известные учащимся способы решения, так и нестандартные подходы к исследованию задач с параметром.

Задача 1. При всех значениях параметра а определите количество решений системы $\begin{cases}\log_a(x+y-1)=x-3,\\ 2x+y=4\end{cases}$

Решение.

1. Необходимо выполнение условий: $a>0, a\neq 1, x+y-1>0.$
2. Выразим из второго уравнения y=4-2x и подставим в первое, получим уравнение: $\log_a(3-x)=x-3$, необходимо, чтобы x<3. Обозначим $t=x-3$, $t<0.$
3. В новой формулировке задача примет вид: при всех значениях параметра а определите количество решений системы $\begin{cases}a^t=-t,\\ t<0\end{cases}$.
4. При a>1 графики функций $\varphi=a^t;\varphi=-t$ пересекаются в единственной точке с абсциссой $t_0\in(-1;0)$, корень единственен в силу различной монотонности функций. Тогда $x_0=t_0+3, y_0=4-2x_0$ - единственное решение исходной системы.
5. При $a\in(0;1)$ функции $\varphi=a^t;\varphi=-t$ убывают, выясним, могут ли их графики касаться. Условие касания графиков имеет вид:

$\begin{cases} a^t = -t, \\ a^t \ln a = -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^t = -t, \\ -t \ln a = -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^t = -t, \\ a^t = e, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{-e} = -t, \\ t_k = -e, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_k = e^{\frac{-1}{e}}, \\ t_k = -e. \end{cases}$ Итак, при $a = e^{\frac{-1}{e}}$ исходная система имеет единственное решение. При $a \in \left(e^{\frac{-1}{e}};1\right)$ графики пересекаются дважды и исходная система имеет два решения. При $a \in \left(0;e^{\frac{-1}{e}}\right)$ графики не имеют общих точек, исходная система не имеет решений.

6. **Ответ:** 1) при $a \in (1;+\infty) \cup \left\{e^{\frac{-1}{e}}\right\}$ система имеет единственное решение; 2) при $a \in \left(0;e^{\frac{-1}{e}}\right)$ система не имеет решений; 3) при $a \in \left(e^{\frac{-1}{e}};1\right)$ система имеет два решения; 4) при a<0, a=1 система не определена.

Задача 2. Определите количество решений системы $\begin{cases} |a-1|^{x-y+1} = \log_\pi x - 7, \\ x - \log_\pi x = y - 8 \end{cases}$ в зависимости от допустимых значений параметра а.

Решение.

1. Необходимо выполнение условий: $a > 0, a \neq 1, -1 < y \leq 9$. Заметим, что при допустимых значениях а исходная система имеет два решения (0.0) и (6,0).
2. Выразим из второго уравнения $y = 6x - x^2$ и подставим в первое, получим уравнение: $\log_a \sqrt{y+1} = y^2 \Leftrightarrow a^{2y^2} = y + 1$
3. В новой формулировке задача примет вид: при всех допустимых значениях параметра а определите количество решений системы $\begin{cases} a^{2y^2} = y + 1, \\ -1 < y \leq 9 \end{cases}$.

4. При $a\in(0;1)$ графики функций $\varphi=a^{2y^2};\varphi=y+1$ пересекаются в точке (0,1). Значению y=0 соответствуют $x_1=0,x_2=6$; но возможна и вторая общая точка графиков функций. Выясним, могут ли их графики касаться. Условие касания графиков имеет вид: $\begin{cases}a^{2y^2}=y+1,\\4ya^{2y^2}\ln a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^{2y^2}=y+1,\\4y(y+1)=\dfrac{1}{\ln a}\end{cases}$. Исследуем разрешимость второго уравнения: $E(4y(y+1))=[-1;360]$, поэтому квадратное уравнение разрешимо только при $a\in\left(0;\frac{1}{e}\right]$, причём, при $a=\frac{1}{e}$ получаем единственную абсциссу точки касания

y=-0.5. Соответствующее уравнение $y=6x-x^2$ имеет два корня, а исходная система – 4 решения. При $a\in\left(0;\frac{1}{e}\right)$ квадратное уравнение $4y(y+1)=\frac{1}{\ln a}$ имеет два корня (отличных от уже известного y=0), т.к. $\frac{1}{\ln a}\in(-1;0)\subset E(4y(y+1))=[-1;360]$. Исследуем выполнение необходимого условия на переменную y, а именно: $-1<y\le 9$. Т.к. $\frac{1}{\ln a}\in(-1;0)$, то квадратное уравнение $4y(y+1)=\frac{1}{\ln a}$ имеет два корня $y_1=\dfrac{-1-\sqrt{1+\frac{1}{\ln a}}}{2};y_2=\dfrac{-1+\sqrt{1+\frac{1}{\ln a}}}{2}$, принадлежащие интервалам: $y_1\in(-1;-0.5)$, $y_2\in(-0.5;0)$, проверяемое условие выполнено, а исходная система при $a\in\left(0;\frac{1}{e}\right)$ имеет шесть решений.

При $a\in\left(\frac{1}{e};1\right)$ уравнение $4y(y+1)=\frac{1}{\ln a}$ не имеет корней, т.к. $1+\frac{1}{\ln a}<0$, графики функций $\varphi=a^{2y^2};\varphi=y+1$ не имеют общих точек, кроме (0,1), исходная система имеет 2 решения.

5. При a>1 графики функций $\varphi = a^{2y^2}; \varphi = y+1$ пересекаются в точкс (0,1), т.е. $y_1 = 0$, но возможна и вторая общая точка графиков функций с абсциссой $y_2 \in (0;+\infty)$, положение которой зависит от параметра а следующим образом: при $a \to 1 \Rightarrow y_2 \to +\infty$. Графики функций $\varphi = a^{2y^2}; \varphi = y+1$ касаться не могут. Найдём то значение параметра а, при котором график функции $\varphi = a^{2y^2}$ пройдёт через граничную точку $y = 9, \varphi(9) = a^{162} = y+1 \Rightarrow a = \sqrt[162]{10}$, при y=9 x=3, а исходная система имеет три решения. Итак, при $a \in (1; \sqrt[162]{10})$ система имеет 2 решения; при $a \in (\sqrt[162]{10}; +\infty)$ - 4 решения.

7. **Ответ:** 1) при $a \in \left(0; \frac{1}{e}\right)$ система имеет шесть решений; 2) при $a \in \left\{\frac{1}{e}\right\} \cup (\sqrt[162]{10}; +\infty)$ система имеет четыре решения; 3) при $a = \sqrt[162]{10}$ система имеет три решения; 4) при $a \in \left(\frac{1}{e}; 1\right) \cup (1; \sqrt[162]{10})$ система имеет 2 решения; 5) при a<0, a=1 система не определена.

Задача 3. Определите количество решений системы $\begin{cases} |a|^{x-y} = \log_2 x - 6, \\ x - \log_2 x = y - 6 \end{cases}$ в зависимости от значений параметра а.

Решение.

1. Необходимо сначала проверить контрольные значения параметра а такие, как 0 и ± 1. При подстановке a=0 в систему получаем неопределённость вида 0^0. При a=0 нет решений. При a=± 1 из системы получаем решение x=128, y=127. При a=± 1 система имеет единственное решение.

2. Выразим из второго уравнения $x - y = \log_2 x - 6$ и подставим в первое, получим уравнение: $|a|^{x-y} = x - y$.

3. Обозначим $t = x - y$. В новой формулировке задача примет вид: при всех допустимых значениях параметра a определить количество решений уравнения $|a|^t = t$. Рассмотрим два промежутка $|a| \in (0;1) \cup (1;+\infty)$.

4. При $a \in (0;1)$ графики функций $\varphi = |a|^t; \varphi = t$ пересекаются в единственной точке $t_0 \in (0;1)$, т.к. рассматриваемые функции имеют разную монотонность. Значению t_0 соответствует единственное решение исходной системы. Графики этих функций не могут касаться.

5. При a>1 графики функций $\varphi = |a|^t; \varphi = t$ могут пересекаться в двух точках, касаться в единственной точке или не иметь общих точек. Условие касания графиков имеет вид: $\begin{cases} |a|^t = t, \\ |a|^t \ln a = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|^t = t, \\ t \ln|a| = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = e, \\ |a|^e = e, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a_k| = e^{\frac{1}{e}}, \\ t_k = e. \end{cases}$. Исследуя разрешимость уравнения $|a|^t = t$, получаем: при $|a| \in \left(1; e^{\frac{1}{e}}\right)$ получаем две точки пересечения графиков, следовательно, два решения уравнения $|a|^t = t$, два решения исходной системы. При $|a_k| = e^{\frac{1}{e}}$ имеем единственную абсциссу точки касания $t_k = e$. соответствующая система уравнений имеет одно решение.

6. **Ответ:** 1) при $a \in [-1;0) \cup (0;1] \cup \left\{e^{\frac{1}{e}}\right\} \cup \left\{-e^{\frac{1}{e}}\right\}$ система имеет единственное решение; 2) при $a \in \left(-e^{\frac{1}{e}};-1\right) \cup \left(1;e^{\frac{1}{e}}\right)$ система имеет два решения; 3)при $a = 0$ система не определена; 4) при $a \in \left(-\infty;-e^{\frac{1}{e}}\right) \cup \left(e^{\frac{1}{e}};+\infty\right)$ система не имеет решений.

Задача 4.Определите количество решений системы $\begin{cases}\log_{a^2} y=\left(x^2+3x+2\right)^4,\\ y=x^2+3x+2\end{cases}$ в зависимости от значений параметра а.

Решение.

1. Необходимо выполнение условий: $|a|\neq 0$ $|a|\neq 1$. $-0.25\leq y$.

2. Подставим из второго уравнения $y=x^2+3x+2$ в первое, получим уравнение: $\log_{a^2} y = y^4 \Leftrightarrow a^{2y^4} = y$.

3. В новой формулировке задача примет вид: при всех допустимых значениях параметра а определите количество решений системы $\begin{cases}|a|^{2y^4}=y,\\ -0.25\leq y\end{cases}$.

4. При $|a|\in(0;1)$ графики функций $\varphi=a^{2y^4}$; $\varphi=y$ пересекаются в точке $y_0\in(0;1)\Rightarrow y_0\geq -0.25$.. Касаться графики не могут. Значению y_0 соответствуют значения х из уравнения $y_0=x^2+3x+2$, $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{1+4y_0}}{2}$; $x_2=\dfrac{-3+\sqrt{1+4y_0}}{2}$. $(x_1;y_0),(x_2;y_0)$–два решения исходной системы. Итак, при $a\in(-1;0)\cup(0;1)$ система имеет два решения.

5. При $|a|\in(1;+\infty)$ графики функций $\varphi=|a|^{2y^4}$; $\varphi=y$ могут: не иметь общих точек, касаться или пересекаться. Выясним, при каких а их графики касаются. Условие касания графиков имеет вид:

$$\begin{cases}|a|^{2y^4}=y,\\ 8y^3|a|^{2y^4}\ln a=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a|^{2y^4}=y,\\ 8y^3y\ln|a|=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a|^{2y^4}=y,\\ \ln|a|^{2y^4}=\dfrac{1}{4},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a_k|=e^{\frac{1}{8e}},\\ y_k=e^{\frac{1}{4}}.\end{cases}$$

Исследуем разрешимость второго уравнения при $y_k=e^{\frac{1}{4}}$:

$$y_{\hat{e}\grave{a}\acute{n}}=x^2+3x+2\Leftrightarrow x^2+3x+2-e^{\frac{1}{4}}=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{1+4e^{\frac{1}{4}}}}{2},$$

поэтому исходная система имеет при $|a_k|=e^{\frac{1}{8e}}$ два решения $(x_1;y_k),(x_2;y_k)$.

6. При $|a| > e^{\frac{1}{8e}}$ графики функций $\varphi = |a|^{2y^4}; \varphi = y$ не имеют общих точек, а исходная система не имеет решений.

7. При $|a| \in \left(1; e^{\frac{1}{8e}}\right)$ система имеет 4 решения, т.к. графики функций $\varphi = |a|^{2y^4}; \varphi = y$ пересекаются 2 раза и каждой точке пересечения соответствуют два решения системы.

8. **Ответ:** 1) при $a \in (-1;0) \cup (0;1) \cup \left\{e^{\frac{1}{8e}}; -e^{\frac{1}{8e}}\right\}$ система имеет два решения; 2) при $a \in \left(-e^{\frac{1}{8e}}; -1\right) \cup \left(1; e^{\frac{1}{8e}}\right)$ четыре решения; 3) при $a \in \left(-\infty; -e^{\frac{1}{8e}}\right) \cup \left(e^{\frac{1}{8e}}; +\infty\right)$ система не имеет решений; 4)при $a = 0, a = \pm 1$ система не определена.

Задача 5. При всех значениях параметра а определите количество решений системы $\begin{cases} a^{y^2} = \sqrt[9]{-\frac{1}{8} - 3x - 2x^2} \\ 16x^2 + 24x + 1 = 8y. \end{cases}$

Решение.

1. Необходимо сначала проверить контрольные значения параметра а такие, как 0 и 1. При подстановке а=0 в систему получаем неопределённость вида 0^0. При а=0 нет решений. При а=1 решая систему, получаем решение х=-0,75, у=-1. При а=1 система имеет единственное решение.

2. Подставим из второго уравнения $y = 2x^2 + 3x + \frac{1}{8}$ в первое, получим уравнение: $a^{9y^2} = -y$.

3. В новой формулировке задача примет вид: при всех допустимых значениях параметра а определите количество

решений системы $\begin{cases} a^{9y^2} = -y, \\ -1 \le y < 0. \end{cases}$ Второе неравенство учитывает множество значений квадратного трёхчлена $y = 2x^2 + 3x + \frac{1}{8}$ и тот факт, что y<0, как это следует из первого уравнения системы.

4. При $a \in (0;1)$ графики функций $\varphi = a^{9y^2}; \varphi = -y$ пересекаются в точке $y_0 \in (-1;0)$. Касаться графики не могут. Заметим, что y_0 удовлетворяет условию $-1 \le y < 0$, поэтому значению y_0 соответствуют два значения x из уравнения $y_0 = 2x^2 + 3x + \frac{1}{8}$, $x_{1.2} = \frac{-3 \pm \sqrt{8 + 8y_0}}{4}$, $(x_1; y_0), (x_2; y_0)$ – два решения исходной системы. Итак, при $a \in (0;1)$ система имеет два решения.

5. При $a \in (1;+\infty)$ графики функций $\varphi = a^{9y^2}; \varphi = -y$ могут: не иметь общих точек. касаться или пересекаться. Выясним, при каких a их графики касаются. Условие касания графиков имеет вид:
$$\begin{cases} a^{9y^2} = -y, \\ 18y\ a^{9y^2} \ln a = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{9y^2} = -y, \\ 18y^2 \ln a = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{9y^2} = -y, \\ \ln a^{y^2} = \frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_k = e^{\frac{1}{18e}}, \\ y_k = -e^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$
Исследуем разрешимость второго уравнения исходной системы $y = 2x^2 + 3x + \frac{1}{8}$ при $y = -\sqrt{e}$:
$-\sqrt{e} = 2x^2 + 3x + \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + \frac{1}{8} + \sqrt{e} = 0; D < 0 \Rightarrow \varnothing$, иначе, можно заметить, что $y = -\sqrt{e}$ не удовлетворяет условию $-1 \le y < 0$, поэтому исходная система не имеет при $a = e^{\frac{1}{18e}}$ решения.

6 При $a \in \left(1; e^{\frac{1}{18e}}\right)$ графики функций $\varphi = a^{9y^2}; \varphi = -y$ пересекутся дважды, но абсциссы точек пересечения находятся левее контрольного значения y=-1. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим предельный случай $a \to 1+0$, при этом экспонента вырождается в горизонтальную прямую $\varphi = 1$

которая пересекается с наклонной прямой в точке с абсциссой -1. Итак, при рассматриваемых значениях а система не имеет решений.

7. **Ответ:** 1) при $a\in(0;1)$ система имеет два решения; 2) при $a=1$ единственное решение; 3) при а=0 , а>1 нет решений.

Задача 6. При всех значениях параметра а определите число решений системы $\begin{cases} a^{3x-5y^2-7}=21+15y^2-9x, \\ 7x-5y^2=13. \end{cases}$

Решение.

1. Необходимо выполнение условий: $a>0, x\geq\frac{13}{7}$. Заметим, что при значениях а=0, а=1 исходная система не имеет решений.
2. Выразим из второго уравнения $5y^2=7x-13$ и подставим в первое, получим уравнение: $a^{6-4x}=12x-18$. Замена $t=3-2x$.
3. В новой формулировке задача примет вид: при всех допустимых значениях параметра а определите количество решений системы $\begin{cases} a^{2t}=-6t, \\ t\leq\frac{-5}{7}. \end{cases}$
4. При $a\in(1;+\infty)$ графики функций $\varphi=a^{2t};\varphi=-6t$ пересекаются в точке с абсциссой $t_0\in\left(-\frac{1}{6};0\right)$, условие $t\leq\frac{-5}{7}$ не выполняется, следовательно, при $a\in(1;+\infty)$ система не имеет решений. Графики функций $\varphi=a^{2t};\varphi=-6t$ касаться не могут.
5. При $a\in(0;1)$ графики функций $\varphi=a^{2t};\varphi=-6t$ могут пересекаться в двух точках $t_1<t_2<0$, для которых должно выполняться ограничение $t\leq\frac{-5}{7}$. Рассмотрим сначала случай касания графиков, соответствующие требования (равенство функций, равенство их производных) запишем в виде:

$\begin{cases} a^{2t} = -6t, \\ 2a^{2t}\ln a = -6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{2t} = -6t, \\ -12t\ln a = -6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_k = e^{-\frac{3}{e}}, \\ t_k = -\frac{e}{6}. \end{cases}$ Но $-\frac{e}{6}$ не удовлетворяет условию $t \le \frac{-5}{7}$, и система не имеет решений при $a_k = e^{-\frac{3}{e}}$. При $a \in \left(0; e^{\frac{-3}{e}}\right)$ все экспоненты $\varphi = a^{2t}$ расположены над прямой $\varphi = 6t$ и не имеют с ними общих точек, исходная система не имеет решений при $a \in \left(0; e^{\frac{-3}{e}}\right)$. При $a \in \left(e^{\frac{-3}{e}}; 1\right)$ два пересечения экспонент с прямой, исследуем, где лежат абсциссы точек пересечения $t_1 < t_2 < 0$ и попадают ли они в промежуток $\left(-\infty; \frac{-5}{7}\right]$.

Рассмотрим предельный случай, когда а стремится к единице, график экспоненты при этом будет вырождаться в горизонтальную прямую $\varphi = 1$ $t_1 \to -\infty; t_2 \to -\frac{1}{6}$. Если теперь рассмотрим случай, когда а стремится к $a_k = e^{-\frac{3}{e}}$, то увидим, что $t_1 \to -\frac{e}{6} - 0; t_2 \to -\frac{e}{6} + 0$. но прежде, чем занять предельное положение $\left(-\frac{e}{6}; e\right)$ левая точка пересечения пройдёт через точку прямой $P\left(\frac{-5}{7}; \frac{30}{7}\right)$ и мы можем найти значение параметра а, при котором это произойдёт, для этого решим уравнение $a^{2t} = -6t$ при $t = \frac{-5}{7}$

получаем $a^{\frac{-10}{7}} = \frac{30}{7} \Leftrightarrow a_P = \sqrt[10]{\left(\frac{7}{30}\right)^7} = \left(\frac{7}{30}\right)^{0 7}$. Заметим, что при всех этих рассмотрениях, правый корень t_2 находится в интервале $\left(-\frac{e}{6}; -\frac{1}{6}\right)$ и не принадлежит промежутку $\left(-\infty; \frac{-5}{7}\right]$. Итак. при $a \in \left(\left(\frac{7}{30}\right)^{0 7}; 1\right)$ левый корень $t_1 \in \left(-\infty; \frac{-5}{7}\right]$ и уравнение $a^{2t} = -6t$ имеет единственный корень t_0, ему соответствует единственное значение х из замены $t_0=(3-2x)\Leftrightarrow x_0=\frac{3-t_0}{2}$, по которому находим два значения у по формуле $y_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{7x-13}{5}}=\pm\sqrt{\frac{15-7t_0}{10}}$, т.о. исходная система имеет два решения при $a\in\left(\left(\frac{7}{30}\right)^{0.7};1\right)$.

При $a\in\left(e^{\frac{-3}{e}};\left(\frac{7}{30}\right)^{0.7}\right)$ оба корня $t_1;t_2\notin\left(-\infty;\frac{-5}{7}\right]$ система не имеет решений.

6. **Ответ:** 1) при $a\in\left(0;e^{\frac{-3}{e}}\right)\cup\left(e^{\frac{-3}{e}};\left(\frac{7}{30}\right)^{0.7}\right)\cup[1;+\infty)\cup\{0\}$ система не имеет решений; 2) при $a\in\left(\left(\frac{7}{30}\right)^{0.7};1\right)$ система имеет 2 решения.

Задача 7. При каких целых значениях параметров а и в система имеет единственное решение? $\begin{cases}xyz+z=-a\\ xyz^2-z=b.\\ x^2+y^2+z^2=4\end{cases}$

Решение.

1. Анализ обнаруживает чётность всех уравнений по совокупности переменных х,у, т.е. если (x,y,z) - решение системы, то (-x,-y,z) тоже решение. Но решение должно быть одно, это возможно только при x=0, y=0. Итак, для выполнения требования задачи необходимо, чтобы решение имело вид (0,0,z). Из исходной системы выводим следствие: $\begin{cases}z=-a,\\ z=-b,\\ z^2=4.\end{cases}$ Система равносильна совокупности двух систем: $\begin{cases}z=2,\\ a=-2,\\ b=-2;\end{cases}$ или $\begin{cases}z=-2,\\ a=2,\\ b=2.\end{cases}$

Итак, для выполнения тебования задачи необходимо, чтобы а=в=2 или а=в=-2.

2. Проверка достаточности. Проверим пару а=в=-2 . Имеем систему $\begin{cases} xyz + z = -2, \\ xyz^2 - z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$

Сложим первое и второе уравнения, вынесем xy за скобку, в скобках останется z плюс квадрат переменной z. Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей (а они существуют всегда) равен нулю. Получаем четыре возможности: (0,y,z), (x,0,z), (x,y,0), (x,y,-1). Подставляя первую тройку в систему, получим решение x=0,y=0,z=2. Подставляя вторую тройку в систему, получим решение x=0,y=0,z=2 (то же самое). При подстановке остальных троек в систему решений не получим. Итак, доказано, что при а=в=-2 решение системы единственно.

3. При проверке пары а=в=2 аналогино получим четырс варианта: (0,y,z), (x,0,z), (x,y,0), (x,y,-1), первый и второй дадут решение (0,0,-2), в третьем нет решений, в четвёртом будет четыре решения (проверьте это самостоятельно), т.е в случае а=в=2 единственности не будет.

Ответ: единственное решение при а=-2, в=-2; (при а=в=2 система имеет пять решений).

Задача 8. При каких значениях параметра а система $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+2x+a^2-2ay+1}+\sqrt{x^2+y^2-6x-2ay+9+a^2}=4\\ x^2-(2a+1)x+a^2+a-2=0\end{cases}$ имеет единственное решение. Найдите это решение системы.

Решение

1. В подкоренных выражениях выделим квадраты двучленов (полные квадраты), левую часть второго уравнения разложим на множители, предварительно найдя корни. Перепишем систему в виде: $\begin{cases}\sqrt{(x+1)^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-a)^2}=4\\ (x-(a+2))(x-(a-1))=0.\end{cases}$

2. В системе координат XOY рассмотрим три точки A(-1;a), B(3;a), M(x;y). Выясним геометрический смысл первого уравнения. Первый радикал выражает расстояние от A(-1;a) до M(x;y), второй - от M(x;y) до B(3;a). По условию сумма длин отрезков AM и MB равна 4. Важно заметить, что точки A и B лежат на горизонтальной прямой y=a, расстояние между точками равно 4. Отсюда следует, что точка M лежит на отрезке AB. Это означает, что первое уравнение системы – это уравнение отрезка AB, которое проще записывается так:

   $y=a;\quad x\in[-1;3]$.

3. Из второго уравнения получаем $x=(a+2); x=(a-1)$, в плоскости XOY это две вертикальные прямые, которые должны только один раз пересечь отрезок y=a.

4. Прямая $x=(a+2)$ имеет общие точки с отрезком тогда и только тогда, когда $-1\le a+2\le 3 \Leftrightarrow -3\le a\le 1$.

5. Аналогично, прямая $x=(a-1)$имеет общие точки с отрезком тогда и только тогда, когда $-1\le a-1\le 3 \Leftrightarrow 0\le a\le 4.$

6. При$0\le a\le 1$ система имеет два решения. Исключив эти значения а, получим:

Ответ:$a\in[-3;0)\cup(1;4]$;

Задача 9. При каких значениях параметра а наименьшее значение функции $f(x)=2ax+|x^2-4x+3|$ больше 1?

Решение

1. По условию значения функции больше 1 при всех х, следовательно f(1)>1и a>0.5, это необходимое условие.

2. $f(x)=2ax+|x^2-4x+3|=\begin{cases}2ax+x^2-4x+3, x\in(-\infty;1]\cup[3;+\infty)\\ 2ax-x^2+4x-3, x\in[1;3]\end{cases}$

3. $f'(x)=\begin{cases}2a+2x-4, x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)\\ 2a-2x+4, x\in(1;3)\end{cases}$

4. Заметим, что функция не дифференцируема в точках 1 и 3, т.к. производные слева и справа в этих точках не совпадают: $2a+2\ne 2a-2\Rightarrow x_{k1}=1; x_{k2}=3.$

5. Продолжим отыскание критических точек, учитывая , что a>0.5

$f'(x)=0\Leftrightarrow x_{k3}=2-a, x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty); \quad x_{k4}=2+a, x\in(1;3).$

Иначе: $x_{k3}=2-a, \quad a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty); \quad x_{k4}=2+a, \quad a\in\left(\frac{1}{2};1\right).$

6. При неограниченном возрастании модуля х значения функции становятся бесконечно большими, поэтому точки, в которых функция принимает наименьшее значение следует искать среди критических точек. Проверим выполнение условий:

$f(1)>1; f(3)>1; f(2-a)>1; f(a+2)>1$. Первое и второе очевидно выполнены при a>0.5, из третьего получаем, вычисляя значение функции по первой строке

$2a(2-a)+(2-a)^2-4(2-a)+3>1 \Leftrightarrow -a^2+4a-1>1 \Leftrightarrow a^2-4a+2<0 \Leftrightarrow a\in\left(0.5;2+\sqrt{2}\right)$

Из четвёртого неравенства получаем, вычисляя значения функции по второй строке: $a^2+4a+1>1 \Leftrightarrow a>0.5$. Пересекая полученные интервалы, приходим к **ответу**:

при $a\in\left(0.5;2+\sqrt{2}\right)$ наименьшее значение функции больше 1.

Задача 10. При каких значениях параметра a функция $f(x)=x^2-2\left|x-a^2\right|-10x$ имеет хотя бы одну точку максимума?

Решение

1. Функция определена на всей числовой прямой. Найдём критические точки функции, т.е. внутренние точки области определения, в которых производная равна нулю или не существует.

2. $f(x)=x^2-2\left|x-a^2\right|-10x=\begin{cases} x^2+2x-2a^2-10x, x\le a^2, \\ x^2-2x+2a^2-10x, x\ge a^2. \end{cases}$

3. $f'(x)=\begin{cases} 2x+2-10, x<a^2, \\ 2x-2-10, x>a^2. \end{cases}=\begin{cases} 2(x-4), x<a^2, \\ 2(x-6), x>a^2. \end{cases}$

4. Заметим, что функция не дифференцируема в точке $x=a^2$, т.к. производные слева и справа в этой точке не совпадают: $2\left(a^2-4\right)\ne 2\left(a^2-6\right)\Rightarrow x_{k1}=a^2$

5. Продолжим отыскание критических точек: $f'(x)=0\Rightarrow x_{k2}=4, x<a^2;\quad x_{k3}=6, x>a^2.$

6. Три критические точки делят числовую прямую на четыре интервала, предстоит определить знаки производной на интервалах. Положение первой критической точки не определено, рассмотрим три случая:

$a^2 < 4 < 6$; $4 < a^2 < 6$; $4 < 6 < a^2$. В первом случае знак производной в окрестности точек 4и a^2 отрицательный, а точка 6 является точкой минимума. Во втором случае $x_{min} = 4$, $x_{max} = a^2$ $x_{min} = 6$. В третьем случае $x_{min} = 4$, больше точек экстремума нет.

7. Наконец, если $a^2 = 4$, то $f'(a^2 \pm 0) < 0$, $a^2 = 4$ не является точкой экстремума; если $a^2 = 6$, то $f'(a^2 \pm 0) > 0$, $a^2 = 6$ не является точкой экстремума.

8. **Ответ**: при $4 < a^2 < 6$ функция имеет единственную точку максимума $x_{max} = a^2$.

Задача 11. Исследуйте разрешимость системы неравенств в зависимости от значениях параметра a. Определите: 1)при каких a система не имеет решений; 2) при каких a система имеет единственное решение; 3) при каких a система имеет бесконечное множество, задайте это множество явной формулой.

$$\begin{cases} \sqrt{(x-2a)^2 + (y-a)^2} \le \dfrac{|a|}{6\sqrt{5}}, \\ x - 2y \ge 1. \end{cases}$$

Решение

1. В координатной плоскости XOY первое неравенство задаёт семейство кругов с центром в точке C(2a;a) , радиуса

   $R = \dfrac{|a|}{6\sqrt{5}}$. Если из координат центра $x_c = 2a; y_c = a$ исключить параметр a, то получим линию центров y=0.5x, т.е. прямую, на которой находятся центры всех окружностей семейства.

2. Второе неравенство системы задаёт в системе XOY полуплоскость, расположенную не выше прямой y=0.5x-0.5.

3. Геометрическая переформулировка задачи выглядит так 1)при каких a круги семейства не имеют общих точек с

полуплоскостью; 2)при каких а круги касаются границы полуплоскости; 3)при каких а круги пересекаются с полуплоскостью (при этом сегмент круга находится в полуплоскости).

4. Очевидно, что радиус увеличивается с ростом модуля а, при а=0 круг вырождается в точку O(0;0). Исследуем, когда радиус станет равным расстоянию между параллельными прямыми $l_1 : y = 0.5x$ и $l_2 : y = 0.5x - 0.5$. Используем известный результат: если даны две параллельные прямые $l_1 : y = kx + b_1$ $l_2 y = kx + b_2$, то расстояние между ними равно $\rho(l_1,l_2) = \frac{|b_1 - b_2|}{\sqrt{1+k^2}}$, в нашем случае $\rho(l_1,l_2) = \frac{|0.5|}{\sqrt{1+0.5^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

5. Решим уравнение $R(|a|) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|a|}{6\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |a| = 6.$ При а=6; а=-6 соответствующие окружности $(x-12)^2 + (y-6)^2 = \frac{1}{5}$ и $(x+12)^2 + (y+6)^2 = \frac{1}{5}$ с центрами $C_1(12;6)$; $C_2(-12;-6)$ касаются границы полуплоскости, исходная система имеет единственное решение.

6. Найдём эти решения. Для этого вычислим координаты точки касания, например, окружности $(x-12)^2 + (y-6)^2 = \frac{1}{5}$ и прямой $y = \frac{x-1}{2}$. По теореме, радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен к касательной. Проведём прямую через точку $C_1(12;6)$ перпендикулярно к прямой $y = \frac{x-1}{2}$, из условия перпендикулярности прямых угловой коэффициент искомой прямой равен -2, а уравнение прямой имеет вид: $y - 6 = -2(x-12)$ или $y = -2x + 30$.

7 Решив систему двух уравнений $y = \frac{x-1}{2}$ и $y = -2x + 30$, найдём координаты точки касания: $x_{k1} = 12.2; y_{k1} = 5.6$. Аналогично

находится единственное решение исходной системы при $a=-6$ из решения системы двух уравнений $y=\frac{x-1}{2}$ и $y=-2x-30$, $x_{k2}=-11.8$; $y_{k2}=-6.4$. Систему уравнений из п.6 можно решить подстановкой, сведя к квадратному уравнению.

8. Очевидно, что при $|a|<6$ система не имеет решений, т.к. круги расположены выше границы полуплоскости.

9. При $|a|>6$ множеством решений системы является множество точек плоскости XOY, образующих сегмент круга. Из системы

$$\begin{cases}(x-2a)^2+(y-a)^2=\left(\frac{|a|}{6\sqrt{5}}\right)^2\\ y=\frac{x-1}{2}.\end{cases},\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2a)^2+\left(\frac{x-1}{2}-a\right)^2=\frac{a^2}{180}\\ y=\frac{x-1}{2}.\end{cases}$$

, получаем квадратное уравнение $(x-2a)^2+\left(\frac{x-1}{2}-a\right)^2=\frac{a^2}{180}$ с корнями $x_{1,2}=\frac{5a+1\pm\sqrt{D(a)}}{2.5}$, где $D(a)=\frac{a^2}{36}+5a-\frac{1}{4}$. Сегмент, ограниченный сверху прямой $y=\frac{x-1}{2}$, снизу – нижней полуокружностью $y=a-\sqrt{\frac{a^2}{180}-(x-2a)^2}$, можно задать системой неравенств:

$$\begin{cases}x_1\le x\le x_2\\ a-\sqrt{\frac{a^2}{180}-(x-2a)^2}\le y\le\frac{x-1}{2}.\end{cases}$$

10. **Ответ**: 1)при $|a|<6$ система не имеет решений; 2) при a=6 единственное решение x=12.2; y=5.6; при a=-6 единственное решение x=-11.8; y=-6.4; 3) при $|a|>6$ система имеет бесконечное множество решений $\begin{cases}x_1\le x\le x_2\\ a-\sqrt{\frac{a^2}{180}-(x-2a)^2}\le y\le\frac{x-1}{2}.\end{cases}$

Задача 12. Исследуйте разрешимость системы неравенств $\begin{cases}(x+1-2a)^2+(y+2a-1)^2\le(2a+1)^2\\(x+1+4a)^2+(y-6a-1)^2\le(9a-6)^2.\end{cases}$, в зависимости от значениях параметра а. Определите: 1)при каких значениях а система не имеет решений;

2) при каких значениях а система имеет единственное решение, найдите хотя бы одно из этих решений; 3) при каких значениях а система имеет бесконечное множество решений, дайте геометрическую интерпретацию множества решений.

Решение

1. В координатной плоскости XOY первое неравенство задаёт семейство кругов K1 с центром в точке C1(2a-1;-2a+1), радиуса $R_1=|2a+1|$. Если из координат центра $x_c=2a-1; y_c=-2a+1$ исключить параметр а, то получим линию центров у=-х, на которой находятся центры всех окружностей семейства.

2. Второе неравенство системы задаёт в координатной плоскости XOY семейство кругов K2 с центром в точке C2(-4a-1;6a+1), радиуса $R_2=|9a-6|$. Линия центров у=-1.5х-0.5.

3. Заметим, что при увеличении а от 0 до плюс бесконечности круги K1 иK2 движутся в противоположных направлениях: K2 – влево-вверх, K1- вправо-вниз, радиусы кругов в зависимости от а изменяются от 0 до бесконечности.

4. Геометрическая переформулировка задачи состоит в том, чтобы в движениях кругов выделить те положения, при которых круги: 1) не имеют общих точек; 2) касаются; 3)пересекаются.

5. Переформулируем задачу с геометрического языка на алгебраический, для этого воспользуемся известным утверждением: круги с центрами в точках C1 и C2 радиусов R1 и R2 имеют общие точки тогда и только тогда, когда

расстояние между их центрами не превосходит суммы радиусов,

т.е.

$$\rho(C_1;C_2)\le R_1+R_2 \Leftrightarrow \sqrt{(2a-1+4a+1)^2+(-2a+1-6a-1)^2}\le|2a+1|+|9a-6|$$

$$10|a|\le|2a+1|+|9a-6|.$$

6. Используя метод интервалов, найдём нули подмодульных выражений: $-0.5;\ 0;\ \frac{2}{3}$, на полученных промежутках $(-\infty;-0.5];(-0.5;0];\left(0;\frac{2}{3}\right];\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$ определяем знаки соответствующих подмодульных выражений: (---); (-+-); (++-), (+++). Решим 4 системы:

$$1)\begin{cases}a\le-0.5\\-10a\le-2a-1-9a+6,\end{cases}\Leftrightarrow a\le-0.5. \qquad 2)\begin{cases}a\in(-0.5;0]\\-10a\le2a+1-9a+6,\end{cases}\Leftrightarrow a\ ...$$

$$3)\begin{cases}a\in\left(0;\frac{2}{3}\right]\\10a\le2a+1-9a+6,\end{cases}\Leftrightarrow 0<a\le\frac{7}{17}. \qquad 4)\begin{cases}a\ge\frac{2}{3}\\10a\le11a-5,\end{cases}\Leftrightarrow a\ge5.$$

Итак, при $a\le\frac{7}{17}$, $a\ge5$ круги будут иметь непустое пересечение, визуализирующее в плоскости XOY множество решений системы.

7. Единственное решение будет только тогда, когда

$$\rho(C_1;C_2)=R_1+R_2\Leftrightarrow10|a|=|2a+1|+|9a-6|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=5\\a=\frac{7}{17}.\end{array}\right.$$

8. При a=5 система примет вид $\begin{cases}(x-9)^2+(y+9)^2\le11^2; & R_1=11;\ C_1(9;-9)\\(x+21)^2+(y-31)^2\le39^2 & R_2=39;\ C_1(-21;31).\end{cases}$

$R_1+R_2=11+39=50;\ \rho(C_1;C_2)=\sqrt{(21+9)^2+(-31-9)^2}=50;$ точка касания окружностей принадлежит линии центров, т.е. прямой C_1C_2, составим уравнение этой прямой, проходящей через точку $C_1(9;-9)$ с угловым коэффициентом $k=-\frac{4}{3}$, который найден из прямоугольного треугольника C_1C_2B, $B(-21;-9)$. Уравнение прямой C_1C_2: $y+9=-\frac{4}{3}(x-9) \Leftrightarrow y=-\frac{4}{3}x+3$. Решаемая система п.8 равносильна системе

$$\begin{cases}(x-9)^2+(y+9)^2=11^2\\ y=-\frac{4}{3}x+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-9)^2+\left(-\frac{4}{3}x+3+9\right)^2=11^2,\\ y=-\frac{4}{3}x+3.\end{cases}$$

$$(x-9)^2+\left(-\frac{4}{3}x+3+9\right)^2=11^2 \Leftrightarrow 25x^2-450x+936=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_k=2.4\\ x_2=\frac{78}{5}.\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow y_k=-\frac{4}{3}x_k+3=-\frac{1}{5}.$$

Аналогично можно вычислить единственное решение исходной системы при $a=\frac{7}{17}$.

9. **Ответ**: 1) при $a\in\left(-\infty;\frac{7}{17}\right]\cup[5;+\infty)$ система имеет решения; 2) при a=5 единственное решение x=2.4; y= - 0.2; при $a=\frac{7}{17}$ система имеет единственное решение; 3) при $a\in\left(\frac{7}{17};5\right)$ система не имеет решений.

Задача 13. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases}axy+2x-3y+3.5=0,\\ 2x+5y+xy+1=0\end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение

1. Второе уравнение проще, оно не содержит параметра, выразим из него x: x(2+y) = -1-5y. Перед тем, как выразить x проверим контрольное значение y=-2. При этом из второго уравнения получаем

-9=0, противоречие, значит, уравнение и система не имеют решений. Следовательно, $y \neq -2 :\Rightarrow x = \frac{-5y-1}{y+2}$, подставляем это выражение для x в первое уравнение:

$$ay\frac{-5y-1}{y+2} + 2\frac{-5y-1}{y+2} - 3y + 3.5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$y^2(-5a-3) + y(-a-16) + 8.5 = 0 \quad (1)$$

2. Переформулируем исходную задачу: при каких значениях а уравнение (1) имеет единственный корень?

3. Анализируя условия, при которых может быть реализовано требуемое, приходим к трём вариантам: 1)при контрольном значении а=-0.6: 2) при нулевом дискриминанте; 3)при условии, что один из корней уравнения (1) равен -2.

3.1 При контрольном значении а=-0.6 из уравнения (1) получаем единственное решение: $y(0.6-16) + 8.5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{85}{154}, x = \frac{-5y-1}{y+2}$.

3.2 $D(a) = 0 \Leftrightarrow (a+16)^2 + 34(5a+3) = 0 \Leftrightarrow a^2 + 202a + 358 = 0 \Leftrightarrow$
$a_{1,2} = -101 \pm \sqrt{9843}$.

3.3 При у=-2 из уравнения (1) получаем необходимое условие на значение параметра $a = \frac{57}{36}$.

4. Проверка достаточности: при найденном значении а уравнение (1) примет вид: $y^2\left(-5\cdot\frac{57}{36}-3\right) + y\left(-\frac{57}{36}-16\right) + 8.5 = 0 \Leftrightarrow 131y^2 + 211y - 102 = 0 \Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{211 \pm 313}{262}$ к орни которого равны: $y_1 = -2; y_2 = \frac{51}{131}$.

5. **Ответ**: при $a \in \left\{\frac{-3}{5}; -101-\sqrt{9843}; -101+\sqrt{9843}; \frac{57}{36}\right\}$ система имеет единственное решение.

Задача 14. Найдите все значения параметра а, большие 1, при каждом из которых уравнение $f(x)=|3^a-3|\cdot\sqrt{x}$ имеет 6 корней, где $f(x)$-нечётная периодическая функция с периодом Т=4, определённая на всей числовой прямой, причём

$f(x)=4.5a^2\cdot(|x-1|-1)^2, åñëè \quad x\in[0:2]$

Решение. Упростим функцию $f(x)=\begin{cases}4.5a^2\cdot(x)^2, & x\in[0;1]\\ 4.5a^2\cdot(x-2)^2, & x\in[1;2]\end{cases}$, и построим её график. Точками максимума этой функции являются точки $x_n=1+4n;\quad n\in N\cup\{0\}$; а все максимумы равны $4.5a^2$. В этой же системе координат построим параболу $y=|3^a-3|\cdot\sqrt{x}$ при неотрицательных х. Исследуем, при каких а парабола пройдёт через точку $(9;4.5a^2)$, для этого решим уравнение $(3^a-3)\cdot\sqrt{9}=4.5a^2\Leftrightarrow a=2$. При а>2 корней будет меньше 6, при а<2 корней будет больше 6.

Ответ: а=2.

Задача 15. Найдите все значения параметра а, большие 1, при каждом из которых уравнение $f(x)=|3^a-3|\cdot\sqrt{x}$ имеет 7 корней, где $f(x)$-нечётная периодическая функция с периодом Т=4, определённая на всей числовой прямой, причём

$f(x)=4.5a^2\cdot(|x-1|-1)^2,\quad x\in[0;2]$

Ответ: при $a\in(a_0;2)$, где a_0 корень уравнения $(3^a-3)\cdot\sqrt{13}=4.5a^2$. Можно доказать, что $a_0\in(1;2)$.

Задача 16. Найдите все пары (x,y), $x\geq0; y\leq0$, удовлетворяющие системе $\begin{cases}\dfrac{6}{f(x)-4}+\dfrac{1}{f(y)-1}=2\\ (f(y)-1)(f(x)-4)=6f(y)-6,\end{cases}$ где $f(x)$ периодическая функция с периодом Т=2, определённая на всей числовой прямой, причём $f(x)=10|x|, x\in[-1;1]$.

Решение. Решим данную систему относительно переменных $f(x)$ и $f(y)$, в результате получим $\begin{cases}f(x)=10;\\ f(y)=2.\end{cases}$ Для решения системы относительно x,y построим график периодической функции $f(x)=10|x|, x\in[-1;1]$. $f(x)=10 \Leftrightarrow x=1+2n, n\in Z$. Учитывая ограничение $x\geq 0$, приходим к результату $x=1+2n, n\in N\cup\{0\}$. Аналогично, $f(y)=2 \Leftrightarrow y=\pm 0.2+2l, l\in Z$ - общее решение. Дополнительному ограничению удовлетворяют $y_1=-0.5-2l, l\in N\cup\{0\}$; è $y_2=-0.5-2m, m\in N\cup\{0\}$.

Ответ: (x,y_1);(x,y_2).

Заключение

Изложенное является фрагментом построенной многоуровневой системы учебных математических задач, однако, размеры статьи не позволяют дать о ней более полное представление.

Новый подход к решению задач в целых числах (С6)

А.А. Максютин

Анализ задачного материала по теме *решение задач в целых числах,* непосредственно связанной с тематикой задач С6 в 2010 и 2011 годах, показывает, что существует некоторое подмножество задач (назовём их *базовыми задачами*), которые неизбежно встают перед человеком, решающим любую задачу из названной темы. Представляется логичным выделить с максимальной полнотой перечень базовых задач, а также адекватные им универсальные и специальные математические учебные действия. Следующим шагом будет обоснование того, что построенный перечень базовых задач действительно является базисом в пространстве задач темы *решение задач в целых числах.* Фактически речь идёт о проверки справедливости следующего утверждения: решение любой задачи данной темы представимо в виде цепочки последовательно разворачивающихся базовых задач (всех или некоторых), взятых в определённой последовательности. В изложении материала будем придерживаться намеченного плана.

Базовые задачи по теме "Решение задач в целых числах»

БЗ1. Задача о делении целого числа **a** на целое число **b** с остатком (нахождение неполного частного **c** и остатка **r**, таких, что выполняется равенство: $a=bc+r,\ \ 0\le r<b$). Способы действий: деление чисел с остатком, использование арифметики остатков (рассуждение по выбранному модулю), проверка чисел на чётность и нечётность, рассуждение от противного. учёт периодичности чередования остатков. Обратная задача: по неполному частному **c** и остатку определить число **a.**

БЗ2. Задача определения вида числа: простое или составное (способы действий: проверка признаков делимости на 2,3,4,5,6,8,9,10,11; проверка условий теоремы: если натуральное число N не делится ни на одно из простых чисел, не превосходящих $[\sqrt{N}]$, т.е. на $p\le[\sqrt{N}]$, то число N –простое, применение формул сокращённого умножения, применение метода математической индукции.

БЗ3. Задача приведения натурального числа N к каноническому виду $N=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots p_k^{\alpha_k}$ (способы действий: разложение на множители, применение основной теоремы арифметики, гарантирующей единственность разложения с точностью до порядка множителей).

Б34. Задача нахождения НОК, НОД двух и более чисел (способы действий: использование основной теоремы арифметики, алгоритма Евклида). Обратная задача: по НОК и НОД двух и более чисел определить эти числа.

Б35. Задача нахождения числа делителей $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)...(\alpha_k+1)$ произвольного натурального числа $N=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot ...p_k^{\alpha_k}$. Способы действий: применение основной теоремы арифметики, правила умножения (принципа произведения). Обратная задача: определение числа N по количеству его делителей.

Б36. Задача нахождения целых решений линейных диофантовых уравнений с двумя неизвестными $ax+by=c$. Способы действий: нахождение (может быть, угадывание) частного решения и применение теоремы о виде общего решения; применение метода спуска.

Б37. Задача нахождения целых решений квадратичных диофантовых уравнений с двумя неизвестными $ax^2+bxy+cy^2 = d$. Способы действий: разложение на множители левой части, рассмотрение уравнения как квадратного относительно одной из переменных с наложением дополнительных ограничений; частный приём: сведение к однородному уравнению в случае d=0; использование свойств функций, входящих в левую часть уравнения (чётность, монотонность, ограниченность, др.).

Б38. Задача нахождения целых решений диофантовых уравнений с двумя и более неизвестными различного вида (например, содержащих неизвестную под знаком показательной функции). Способы действий: рассуждение по выбранному модулю, применение арифметики остатков, использование периодичности чередования остатков, бинома Ньютона.

Б39. Задача нахождения сумм различных числовых последовательностей (суммы первых степеней первых n натуральных чисел, суммы вторых, третьих степеней первых n натуральных чисел, суммы прогрессий, суммирование дробей различного рода, обращение периодических дробей в рациональную дробь). Способы действий: применение аппарата прогрессий, уравнений, метода математической индукции составление и решение рекуррентных соотношений.

Б310. Задача математического моделирования в виде диофантовых уравнений (неравенств) и их систем, рекуррентных соотношений. Способы действий: знаково-символические действия геометрические интерпретации и символически-образные переформулировки условия (например, в комбинированных задачах с модулем, параметром), использование характеристических уравнений.

БЗ11. Решение задачи о принадлежности данного числа данному числовому множеству (N, Z, Q, R,C).

Примеры решения задач в целых числа

Пример 1. Найдите последнюю цифру числа $1234567891011121314151617^{1920212223242526272831}$. Решение. Сначала докажем, что n^1 и n^5 оканчиваются на одну и ту же цифру. Это утверждение эквивалентно утверждению о делимости $n^5-n \vdots 10$. Из разложения на множители $n(n^4-1)=n(n^2-1)(n^2+1)=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)(n^2+1)$ получаем делимость на 2, для доказательства делимости на 5, рассуждаем по модулю 5: в зависимости от остатков при делении на 5 все натуральные числа разбиваются на непересекающиеся классы чисел вида $5k;\ 5k+1;\ 5k+2;\ 5k+3;\ 5k+4$. Подставляя поочерёдно числа из каждого класса в разложение $(n-1)\cdot n\cdot(n+1)(n^2+1)$, будем получать множители, кратные 5. Поскольку 2 и 5 взаимно простые, то делимость на 10 доказана, а значит n^1 и n^5 оканчиваются на одну и ту же цифру. Результат можно обобщить в нескольких направлениях: $n^1;n^5;n^9;\ldots n^{1+4k}$ оканчиваются на одну и ту же цифру; $n^2;n^6;n^{10};\ldots n^{2+4k}$ оканчиваются на одну и ту же цифру; $n^3;n^7;n^{11};\ldots n^{3+4k}$ оканчиваются на одну и ту же цифру; последняя цифра степени числа периодически повторяется с периодом 4, поэтому для решения задачи важен только остаток от деления показателя степени на 4, в решаемой задаче он равен 3. В основании степени для решения задачи имеет значение только разряд единиц, т.е. цифра 7. На основании доказанных утверждений задача сведена к следующей: на какую цифру оканчивается число 7^3. Ответ:3. (Для решения были использованы задачи БЗ 1,2).

Пример 2. Натуральные числа n и m таковы, что и m^3+n и $m+m^3$ делится на n^2+m^2. Найдите m и n.

Решение. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что n≥m. Если два числа делятся на третье, то сумма и разность этих двух чисел делится на третье, следовательно, (m^3+n) ± $(m+m^3) \vdots (n^2+m^2)$. Тогда 0≤n-m; n-m $\vdots (n^2+m^2)$. Но n-m< n^2+m^2, т.е. делимое меньше делителя, это возможно лишь в одном случае, когда n-m=0, следовательно, n=m. Переформулируем условие задачи с учётом полученной информации: $m+m^3$ делится на $2m^2$, найти m. Находим частное: $\frac{m+m^3}{2m^2}=\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{m}\right)$, для того, чтобы оно являлось целым, необходимо, чтобы m было делителем 1, значит m=1, n=1. Использованы БЗ 1,2.

Пример 3. Пионервожатый попросил пионеров принести ему яблоки. Пионеры набрали по одинаковому количеству яблок, но по дороге назад пересорились, и каждый бросил в каждого по одному яблоку. Поэтому они принесли пионервожатому только 95 яблок Сколько было пионеров в отряде и по сколько яблок они собрали первоначально?

Решение. Пусть было x пионеров, по y яблок они собрали первоначально, xy яблок было собрано всего. По условию $xy-x(x-1)=95$, диофантово уравнение приведём к виду $x(y-x+1)=95$, учитывая, что $95=1\cdot 95=95\cdot 1=5\cdot 19-19\cdot 5$, получаем совокупность 4 систем уравнений. Использованы 2,3,7 базовые задачи. Ответ: ((5,23); (19,23); (95,95)). Заметим, что диофантовому уравнению удовлетворяет пара x=1,y 95, но она не удовлетворяет смыслу задачи.

Упражнение 1.

Решите уравнения в целых числах:
а) xy = 3x+y; б) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 5$: в) (x+y)(y-1) = 4;
г) (x-3)(xy+5) = 5; д) $x^2 + xy = 10$; е) $x^2 + 23 = y^2$.

Ответ: а) (2,6), (4,4), (0, 0), (-2,2); б) $(9;4);(-3;-4);(3;4);(-9;-4)$; в) $(-4;5);(-1;-1);(2;2);(2;-3);(4;0);(-1;3)$;
г) $(4;0);(2;-5);(-2;3)$; д) Указание: $y=\frac{10}{x}-x, x\in\{\pm1;\pm2;\pm5;\pm10\}$;
е) Указание: $(y-x)(y+x)=1\cdot 23=(-1)\cdot(23)=23\cdot 1=(-23)\cdot(-1)$, уравнение равносильно совокупности 4 систем.

Пример 4. Докажите, что при любом $n\in N$ числа вида а) 3n+2; б) 4n+3; в)5n+2; г)5n+3 не являются квадратами целого числа.

Решение а). Рассуждаем по модулю 3: рассмотрим остатки при делении на 3, натуральные числа разбиваются на три непересекающихся класса чисел вида 3k,3k+1,3k+2. Но квадраты этих чисел не дают при делении на 3 остаток 2. Утверждение доказано. Решение б) получаем, рассуждая по модулю 4 Использована первая базовая задача. Замечание: убедитесь самостоятельно, что **квадрат натурального числа никогда не оканчивается цифрами 2,3,7,8.**

Пример 5. Существует ли квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами, дискриминант которого равен 39?

Решение. Предположим, что существует, тогда $D = b^2 - 4ac = 39$, преобразуем полученное уравнение в целых числах к виду: $b^2 = 4ac + 39$; $b^2 = 4(ac+9)+3$, что противоречит ранее доказанному. Использована БЗ1.

Упражнение 2. Докажите, что данные уравнения не имеют решений в целых числах: а) x^2-3y = 5; б)$3x^2$-9 = $4y^2$; в) 5n + 2 = m^2; г) 5n + 3 = m^2; д) $x^3 - 3x - 1 = 0$. Подсказка: используйте БЗ1.

Пример 6. Число p>3 - простое. Докажите, что а) p = 6k ± 1, k∈N; б) p^2-1 кратно 24.

Решение а). Рассуждая по модулю 6: 6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5, получаем, что только в двух случаях: 6k+1, 6k+5 не приходим к противоречию с условием, что p простое, большее 3. Дальнейшее очевидно. Решение б). Предположим, что p=6k+1, тогда p^2-1=12k(3k+2). При чётных к на 2 делится второй множитель, при нечётных к на 2 делится третий множитель. При p=6k-1 (или 6k+5) доказывается аналогично. Использована БЗ1.

Пример 7. Найдите НОД всех чисел вида p^2-1, где p пробегает множество всех простых чисел от 5 до 2003. Решение. По доказанному, все числа вида p^2-1делятся на 24, наименьшее из них равно 24 и не имеет делителей, больших, чем 24. Ответ: НОД(p^2-1)=24. Использованы БЗ1 и эвристический приём, называемый *метод крайнего*.

Пример 8. Найдите наибольшее натуральное число n, такое, что $2009! \vdots 2^n$ Решение. Выясним, каков показатель степени двойки в каноническом разложении числа $2009!$ Числа 2,4, ...2008 содержат как минимум одну степень двойки, а таких чисел среди сомножителей будет $\left[\frac{2009}{2}\right]$. Числа 4, 8, 12, ...,2008 содержат как минимум две степени двойки, одна из которых уже учтена, таких чисел среди сомножителей будет $\left[\frac{2009}{2^2}\right]$. Числа 8, 16, 24 ...,2008 содержат как минимум три степени двойки, две из которых уже учтены, таких чисел среди сомножителей будет $\left[\frac{2009}{2^3}\right]$. Продолжая рассуждения, получим сумму$\left[\frac{2009}{2}\right]+\left[\frac{2009}{2^2}\right]+\left[\frac{2009}{2^3}\right]+\left[\frac{2009}{2^4}\right]+\left[\frac{2009}{2^5}\right]+\left[\frac{2009}{2^6}\right]+\left[\frac{2009}{2^7}\right]+\left[\frac{2009}{2^8}\right]+\left[\frac{2009}{2^9}\right]+\left[\frac{2009}{2^{10}}\right]$ =2001, которая равна показателю степени простого числа 2 в каноническом разложении числа $2009!$ Использованы БЗ 3,1.

Пример 9. Каким количеством нулей оканчивается десятичная запись числа $2009!$?

Решение. Выясним, каков показатель степени пятерки в каноническом разложении числа $2009!$ Числа 5,10, ..2005 содержат как минимум одну степень пятёрки, а таких чисел среди сомножителей будет $\left[\frac{2009}{5}\right]$. Числа 25, 50, 75, ...,2000 содержат как минимум две степени пятёрки, одна из которых уже учтена, таких чисел среди сомножителей будет $\left[\frac{2009}{5^2}\right]$. Числа 125, 250, 750 ..2000 содержат как минимум три степени пятёрки, две из которых уже учтены, таких чисел среди сомножителей будет $\left[\frac{2009}{5^3}\right]$. Продолжая рассуждения, получим сумму $\left[\frac{2009}{5}\right]+\left[\frac{2009}{5^2}\right]+\left[\frac{2009}{5^3}\right]+\left[\frac{2009}{5^4}\right]$ 500 которая равна показателю степени простого числа 5 в каноническом разложении числа $2009!$ Использованы БЗ3,1.Имеющаяся на данный момент информация позволяет записать каноническое разложение $2009!$ в виде $2009!=2^{2001}\cdot 3^{b}\cdot 5^{500}\cdot 7^{d}\cdot ...\cdot 2003$ Показатели степени 3, 7 и других простых оснований вычисляются аналогично (сделайте это самостоятельно). Группируя 2 и 5 попарно, можем получить 500 таких пар, которые дадут 500 нулей в конце десятичной записи числа $2009!$

Упражнение 3. Может ли десятичная запись числа $n!$ оканчиваться на а)1000 нулей; б)2008 нулей; в)2009 нулей; г)2010 нулей? Ответ: а)да, n=4005, 4006, 4007, 4008, 4009; б)да; в) нет, г) да, n=8050, 8051, 8052, 8053, 8054. Использованы БЗ1,3.

Пример 10. Найдите наибольшее простое число n, такое, что число $2009!$ делится на n^n.

Решение. Применив неоднократно рассуждения из задач 8 и 9, выполнив аналогичные вычисления, получим

$$2009!=2^{2001}\cdot 3^{1000}\cdot 5^{500}\cdot 7^{333}\cdot 11^{199}\cdot 13^{165}\cdot 17^{124}\cdot 19^{110}\cdot 23^{90}\cdot$$
$$\cdot 29^{71}\cdot 31^{66}\cdot 37^{55}\cdot 41^{50}\cdot 43^{47}\cdot 47^{42}\cdot ...\cdot 1999\cdot 2003$$

Рассмотрим последовательность показателей степени: 2001, 1000, 500, 333, ...1,1. Она убывает от 2001 до 1. Рассмотрим последовательность оснований степени: 2, 3, 5, 7, ...1999,2003 Она возрастает от 2 до 2003. Наблюдение показывает, что в окрестности оснований 43 и 47 происходит любопытное изменение: если до этого момента показатели степени были больше соответствующего основания, то, начиная с 47 показатели становятся меньше своих оснований и продолжают уменьшаться. Причина убывания последовательности показателей кроется в способе их вычисления и простой арифметической закономерности: чем на большее делим тем меньшее получаем. В силу различной монотонности последовательностей, ситуация, аналогичная той, которая сложилась в окрестности оснований 43 и 47 больше не повторится. Тогда ясно, что если n пробегает множество всех простых чисел от 2 до 43, то n^r является делителем числа $2009!$ Наибольшим из n является число 43. Использованы БЗ 1,3.

Пример 11. Найдите натуральное число n, имеющее ровно 6 делителей, сумма которых равна 3500.

Решение. Согласно БЗ5 число делителей произвольного числа $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}$ равно $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\ldots(\alpha_k+1)$, каждый из множителей больше или равен 2. В условиях задачи это произведение равно 6, которое только двумя способами (с точностью до перестановки множителей) представимо в соответствующем виде $(5+1)$ или $(1+1)(2+1)$, откуда получаем две возможные структуры искомого числа: гипотеза первая 1) $N = p_1^5$; гипотеза вторая 2) $N = p_1^2 \cdot p_2$ Рассмотрим первый случай: сумма шести делителей равна 3500: $1+p+p^2+p^3+p^4+p^5=3500$;суммируя прогрессию, приведём уравнение относительного простого р к виду $p^6-1=3500(p-1), p \in \{2;3;5;7;\ldots\}$. Проведём численный эксперимент, подставляя поочерёдно простые р, при этом левая часть уравнения меньше правой при 2,3, а при р=5 левая больше правой части. Так как функции в обеих частях уравнения непрерывны, то на интервале $(3;5)$есть корень уравнения (теорема о корне Больцано), можно доказать, что он единственный. Но так как на интервале нет простых чисел, то решаемое уравнение не имеет корней на множестве простых чисел. Первая гипотеза опровергнута. Значит структура искомого числа будет $N = p_1^2 \cdot p_2$. Сумма шести делителей равна 3500: $1+p_1+p_2+p_1p_2+p_1^2+p_1^2p_2=3500$, преобразуем к виду $(p_1+p_2)+p_1(p_2+p_1+p_1p_2)=3499$. Далее рассуждаем по модулю 2, т.е. рассмотрим все возможные комбинации чётных и нечётных $p_1;p_2$. Случай 1: $p_1;p_2$ оба чётны- невозможен, т.к. нет двух простых чётных чисел. Случай 2: p_1 *– нечётно*; p_2 *– чётно*, в этом случае оба слагаемых левой части уравнения $(p_1+p_2)+p_1(p_2+p_1+p_1p_2)=3499$нечётны, сумма их чётна, а правая часть уравнения нечётна, противоречие. Случай 3: p_1-чётно, p_2-нечётно, , нарушения чётности нет, подставляя вместо p_1единственное чётное простое число 2, получим, что $p_2=499$, $N=p_1^2 \cdot p_2 = 2^2 \cdot 499 = 1996$. Случай 4, когда оба простых основания нечётны, можно не рассматривать, т.к. по условию искомое число единственно и оно найдено.

Упражнение 4. Найдите натуральное число n, имеющее ровно 6 делителей, сумма которых равна 3528. Ответ: 2012.

Упражнение 5. Найдите все натуральные числа n, последняя десятичная цифра которых 0, и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей. Ответ: 2500 400.

Пример12. Верно ли, что $(1^3+2^3+3^3+...+2009^3)$ $(1+2+3+...+2009)$? Решение. Осуществляя эвристический поиск и проводя численные эксперименты, выдвигаем гипотезу, что $(1^3+2^3+3^3+...+n^3)=(1+2+3+...+n)^2$ Методом математической индукции доказываем выдвинутую гипотезу и получаем формулу $(1^3+2^3+3^3+...+n^3)=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Найдём частное

$\frac{1^3+2^3+3^3+...n^3}{1+2+3+...n}=\frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{n(n+1)}{2}$, оно является целым числом, т.к. в числителе стоит чётное число, поскольку произведение двух подряд идущих натуральных чисел, чётно. Ответ: делится Использованы БЗ 9, 1.

Пример13. Процент учеников некоторого класса, повысивших в третьей четверти успеваемость, заключён в пределах от 2,9% до 3,1%. Определите минимально возможное число учеников в таком классе.

Решение. Математическая модель задачи сводится к диофантовому неравенству. Пусть m-число учеников, повысивших успеваемость, n-общее число учеников. $n,m \in N$. По условию $\frac{29}{1000}<\frac{m}{n}<\frac{31}{1000}$, тогда $\frac{1000}{31}<\frac{n}{m}<\frac{1000}{29} \Rightarrow \frac{1000}{31}m<n<\frac{1000}{29}m$. Ясно, что функции, стоящие в левой и в правой частях двойного неравенства, возрастают с ростом m Поэтому достаточно проверять значения m, начиная с наименьших. При m=1 $32.2<n<34.4$ $\Rightarrow n \in \{33;34\}$: $n_{\min}=33$. Использована БЗ10, свойства числовых неравенств и метод крайнего.

Пример14 Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенными между числами $\frac{96}{35}$ и $\frac{97}{36}$ найдите такую, знаменатель которой минимален.

Решение Математическая модель задачи сводится к диофантовому неравенству. Пусть $n,m \in N$, $\frac{97}{36}<\frac{m}{n}<\frac{96}{35}$, найти $n_{\min}$? По условию $\frac{97}{36}<\frac{m}{n}<\frac{96}{35}$, тогда $\frac{35}{96}<\frac{n}{m}<\frac{36}{97} \Rightarrow \frac{35}{96}m<n<\frac{36}{97}m$. Требуется найти наименьшее m, при котором в интервал $\left(\frac{35}{96}m;\frac{36}{97}m\right)$ попадёт первое натуральное число n . Проведём численный эксперимент, подставляя поочерёдно m=1;m=2, и т.д., следя за тем, содержит ли полученный интервал целое число. Наблюдения позволяют выдвинуть гипотезу, что начиная с m=3 целая часть границ интервала сохраняет постоянное значение для трёх последовательных m, что позволит уменьшить число вычислительных проб. При m=19 получаем первый интервал, содержащий целое число7. Второй такой интервал получим при m=27, он содержит второе целое число 10. Искомая дробь имеет вид $\frac{19}{7}$. Использована Б310.

Упражнение 6. Мальчик и девочка измерили одно и то же расстояние в 143 м шагами. Так как длины их шагов различны, то их следы совпали 21 раз. Шаг девочки 55 см. Найдите длину шага мальчика. Ответ:65. Исп. Б31,2,4.

Пример14. При каких целых значениях a,b,c произведение $(3a-9b+c+5)(2a+3b-7c+1)(a+6b+4c+2)$ нечётно?

Решение. Необходимо, чтобы все три множителя были нечётными Однако, сумма множителей равна $6a+4=2(3a+2)$, т.е. четна $\forall a,b,c\in Z$. Следовательно, случай трех нечетных множителей исключен, а именно он дает нечетное произведение. Произведение четно $\forall a,b,c\in Z$. Ответ: ни при каких

Пример15. Докажите, что сумма и разность любых двух целых чисел имеют одинаковую чётность.

Способ 1. Докажем, что $a+b$ и $a-b$, где $\forall a,b\in Z$ одинаковой четности. Перебирая четыре случая, когда a и b оба четны, оба нечетны, a и b разной четности, убеждаемся в справедливости утверждения.

Способ 2. $(a+b)+(a-b)=2a$, - число четное, т.е. слагаемые $a+b$ и $a-b$ могут быть только одинаковой четности.

Пример16. Решите уравнение в натуральных числах $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{25}$, при условии, что a>b.

Решение. Выразим одну переменную через другую $a=25+\frac{625}{b-25}$, по условию a, b – целые, тогда необходимо, чтобы дробь принимала целые значения, т.е b-25 должно быть делителем 625, $(b-25)\in\{\pm1;\pm5;\pm25;\pm125;\pm625\}$. Решим соответствующие линейные уравнения, учтём, что натуральные числа таковы, что a>b, получим ответ: a=150,b=30; a=650, b=26. Исп. Б.3.1,2.

Пример17. Можно ли решить в нечётных натуральных числах уравнение $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$?

Решение. Перепишем уравнение в виде $bcd+acd+abd+abc=abcd$, в левой части равенства стоит сумма четырех нечетных чисел, сумма их четна. В правой части - произведение четырех нечетных чисел, оно нечетно. Равенство невозможно. Исп. Б.3.1.

Упражнение7. Пусть x_0, y_0 какое-либо частное решение диофантова уравнения ax + by = c. Докажите, что $x = x_0 + bt$, $y = y_0 - at$, $t\in Z$ является решением данного уравнения при любом t. Докажите, что любое решение данного уравнения можно представить в таком виде. (Таким образом. получена формула общего решения диофантова уравнения вида ax + by = c).

Пример18. Найдите все решения диофантова уравнения 3x + 5y = 13.

Для каждого из полученных решений найдите те. при которых $|x-y|$, $|x+y|$, xy принимают наибольшие или наименьшие значения.

Решение а). x_0 $1, y_0$ 2- частное решение; $x=1+5t; y=2-3t; t\in Z$ - общее решение уравнения. $|x \; y|=|8t-1|$, $\min|x-y|=1$ при $t=0; x=1; y=2.$

$|x+y|=|2t+3|$. $\min|x+y|$ 1 при $t=-1, t=-2; x=-4, y=5;$ $x=-9, y=8.$

$xy=-15t^2+7t+2;$ t_0 $\frac{7}{30}\notin Z;$ $\max xy=2$ при $t=0, x=1; y=2;$

Упражнение 8. Найдите все решения диофантова уравнения а) 7x – 3y = 11; б) 5x 4y - 44; в) 11x - 5y = 73.

Указание: а)частное решение (2,1), используйте теорему из упражнения 7; б) частное решение (8,-1); г)для решения уравнения применим *метод спуска* (предложенный П.Ферма): выразим переменную y, для этого разделим уравнение на коэффициент 5, тогда: $y=\frac{11x-73}{5}$ $2x$ $15+\frac{x+2}{5}$; необходимо, чтобы (x+2) делилось на 5. следовательно, x+2 5n, x=5n-2, поэтому y=10n-4-15+n=11n-19. Итак, $x=5n-2; y=11n$ $19; n\in Z.$

Упражнение 9. Укажите: а) 2; б) 102; в) 2000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного точного квадрата. Является ли решение единственным? Указание: определите число натуральных чисел между двумя соседними квадратами n^2 и $(n+1)$.

Ответ: а)1и 4; б) 51^2 и 52^2; в) 500^2 и 501^2.

Упражнение 10. Найдите: а) двузначное число; б) трёхзначное число, обладающее наибольшим числом делителей. Ответ: а)72; б)864

Пример 19. Можно ли решить в целых числах уравнение $x^2+px+q=0$, если p и q – нечётные числа?

1) Пусть x - чётное число, x^2- чётное, px- чётное, (x^2+px) - чётное не может равняться нечётному числу q. Этот случай невозможен.

2) Пусть x - нечётное число, x^2- нечётное, px- нечётное, (x^2+px) - чётное, оно не может равняться нечётному числу q. И этот случай не имеет место. Следовательно, уравнение не имеет решений в целых числах.

Пример 20. Найдите все целые a и b, при которых многочлен $v=x^2+ax+b$ принимает при всех целых x: а) чётные; б) нечётные значения.

а) $y=x(x+a)+b$. Рассуждаем по модулю 2: при $x=2n$, y будет чётным при $\forall a$, и чётных b. При $x=2n+1$, и чётном b y будет чётным при нечётном a. Ответ: a- нечётно, b - чётно.

б) Аналогично, при $x=2n$, $y=(4n^2+2an)+b$ будет нечётно при нечётном b. При $x=2n+1$, $y=(2n+1)^2+2an+a+b=$чётное плюс а, у будет нечётным при нечётном a. Ответ: a,b - нечётные.

Пример 21. Докажите, что не существует многогранника, у которого 2009 граней – треугольники, а остальные – четырёхугольники и шестиугольники.

Нарушен закон сохранения чётности: число сторон всех граней многогранника чётно (они соединяются попарно), а здесь число сторон всех граней равно $2009\cdot 3+4x+6v$, т.е. нечётно. Исп.Б.3.№1.

Пример 22. Рассмотрим все пятизначные числа, получаемые перестановкой цифр числа 12357. Докажите, что сумма всех таких чисел (включая исходное число) делится на 11111. Докажите, что аналогичная сумма для числа 23578 не делится на 111.

а) Всего пять цифр, число перестановок пяти символов равно $5!=120$, (это одна из базовых задач комбинаторики). Складывая столбиком 120 слагаемых, получим над каждым разрядом ту или иную комбинацию цифр 1,2,3,5,7, сумма которых постоянна и равна $1\cdot 24+2\cdot 24+3\cdot 24+5\cdot 24+7\cdot 24=18\cdot 24=432$.Сумма всех 120 чисел равна $432+432\cdot 10+432\cdot 100+432\cdot 1000+432\cdot 10000=432\cdot(1+10+100+1000+10000)=11111\cdot 432=4799952$.

б) Всего пять цифр. Складывая все 120 чисел, получаемые перестановками данных цифр, получим сумму, равную 6666600, которая не делится на 111.

Пример 23. Пусть m и n -натуральные числа, причём $\frac{m}{n}$ правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{2n-m}{3n+2m}$, если известно, что она сократима?

Решение. По условию $m<n \Rightarrow 2n-m>0$. Так как дробь $\frac{2n-m}{3n+2m}$ сократима, например, на натуральное число p, p>1, то $\exists a,b \in N$ такие, что $2n-m=p\cdot a; 3n+2m=p\cdot b$. Решим два последних уравнения относительно m,n. Получаем $\begin{cases} 7n=p(2a+b) \\ 7m=p(2b-3a) \end{cases}$. Числа 7n, 7m делятся на p, но ни m, ни n не делятся на p,т.к. это противоречило бы несократимости дроби. Значит $7 \vdots p$, но 7 простое, следовательно, 7=p. Ответ: дробь сократима на 7.Исп.Б.З.№1,2.

Упражнение 11. Пусть m и n -натуральные числа, причём $\frac{m}{n}$ - правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$, если известно, что она сократима? Ответ: на 11.

Пример 24. Решите в натуральных числах уравнение а) $2^x-3^y=1$.

Решение. Множество натуральных чисел ограничено снизу, используя эвристический приём «метод крайнего», рассмотрим случаи x=1, тогда y=0, $0 \notin N$. При x=2, y=1. Пусть $x \geq 3$, тогда в уравнении $2^x=3^y+1$ левая часть делится на 8, значит и правая часть делится на 8. Рассмотрим переменную y, рассуждаем по модулю 2: y=2k+1 или y=2k, $k \in N$. Если y=2k+1, то уравнение $2^x=3^y+1$ примет вид $2^x=3\cdot 9^k+1$ или, $2^x=3\cdot(8+1)^k+1$, или $2^x=24l+4$, правая часть которого не делится на 8. Получено противоречие. Рассмотрим случай y=2k, тогда уравнение примет вид: $2^x=9^k+1$; $2^x=(8+1)^k+1$; $2^x=8l+2$. Правая часть уравнения не делится на 8. Получено противоречие. Следовательно других корней на множестве натуральных чисел, кроме x=2, y=1 уравнение не имеет. Исп. БЗ№1,8.

Пример 25. Решите в натуральных числах уравнение $5^x-3^y=2$.

Решение. 1) Используем *метод крайнего*: при y=1 получаем x=1. Пусть $y \geq 2$, тогда уравнение перепишем в виде $5^x=2+3^y$ или $5^x \equiv 2 \pmod 9$.

2) Исследуем остатки при делении степеней пятёрки на 9, последовательно получаем: 5=5(mod9); 25=7(mod9); 125=8(mod9); 625=4(mod9); 3125=2(mod9); 15625=1 (mod9);

78125=5(mod9);остатки повторяются с периодом 6. Случай $5^x = 2 \pmod 9$ возможен только при x=6k+5. 3) Уравнение принимает вид: $5^{6k+5} - 2 = 3^y$. Проверим ещё раз, что левая часть уравнения делится на 9: $5^{6k+5} = 3125 \cdot (15625)^k = 3125 \cdot (9a+1) = 9b+2$ 4) Покажем теперь, что левая часть уравнения при делении на 7 даёт в остатке 1 $5^{6k+5} - 2 = 5^5(5^{6k} - 1) + 5^5 - 2 = 3125(15625^k - 1) + 3123 = 7c + 446 \cdot 7 + 1 = 7d + 1$. Заметим, что $(15625^k - 1)$ делится на 7, так как разность оснований делится на 7. 5) Но 3^y=1(mod7) только при y=6m. Покажем это: 3=3(mod7); 9=2(mod7); 27=6(mod7); 81=4(mod7); 243=5(mod7); 729=1(mod7); 2189=3(mod7); остатки повторяются с периодом 6. Случай 3^y=1(mod7) возможен только при y=6m. 6) Уравнение принимает вид: $5^{6k+5} - 2 = 3^{6m}$; или $5^{6k+5} - 3 = 3^{6m} - 1$. Заметим, что правая часть уравнения делится на 13, поскольку разность оснований $3^6 - 1 = 13 \cdot 56$ делится на 13. 7) Исследуем делимость на 13 левой части уравнения. Остатки при делении степеней пятёрки на 13 будут 5, 12, 8, 1, 5, действительно: 5=5(mod13); 25=12(mod13): 125=1(mod13); 3125=5(mod13); остатки повторяются с периодом 4 и среди них нет 3, следовательно, левая часть уравнения не делится на 13. Противоречие означает, что корней при $y \geq 2$ нет. Ответ: y=1,x=1. Исп. БЗ№1,8.

Пример 26. Решите в натуральных числах уравнение $3^m + 4^n = 5^k$.

Решение. Исследуем закономерности появления остатков при делении степеней тройки, четвёрки и пятёрки на 3, 4, 5. Для удобства результаты поместим в таблицу.

N	3^N	Остат. при делен. на 4	Остат. при делен. на 5	4^N	Остат. при делен. на 3	Остат. при делен. на 5	5^N	Остат. при делен. на 3	Остат. при делен. на 4
1	**3**	3	3	**4**	1	4	**5**	2	1
2	**9**	1	4	**16**	1	1	**25**	1	1
3	**27**	3	2	**64**	1	4	**125**	2	1
4	**81**	1	1	**256**	1	1	**625**	1	1
5	**243**	3	3	**1024**	1	4	**3125**	2	1
6	**729**	1	4	**4096**	1	1	**15625**	1	1

При делении на 3 левая и правая части уравнения дают одинаковые остатки, равные 1, только при чётных показателях степеней четвёрки и пятёрки, т.е. необходимо $k = 2k_1$, $n = 2n_1$.

Необходимо, чтобы при делении на 4 левая и правая части уравнения давали одинаковые остатки, равные 1, что возможно только при чётном m, т.е. $m = 2m_1$.

Уравнение принимает вид: $3^{2m_1} + 2^{2n_1} = 5^{2k_1}$ или $\left(3^{m_1}\right)^2 + \left(2^{n_1}\right)^2 = \left(5^{k_1}\right)^2$.

Известно (актуализация старых знаний), что, если взаимно простые числа x, y, z образуют пифагорову тройку $x^2+y^2=z^2$, то одно из чисел x или y – чётное, одно из чисел x,y или z – делится на пять и существуют такие взаимно простые натуральные числа p, q разной чётности, что $x = p^2 - q^2$; $y = 2pq$; $z = p^2 + q^2$.

Так как p и q разной чётности, то $3^{m_1} = p^2 - q^2$; $2^n = 2pq$; $5^{k_1} = p^2 + q^2$, причём, $p \neq 1$, т.к. тогда $3^{m_1} < 0$, следовательно, q 1, тогда $3^{m_1} = p^2 - 1$; $2^n = 2p$; $5^{k_1} = p^2 + 1$.

Исключая из первого и третьего уравнений параметр p, получим $5^{k_1} - 3^{m_1} = 2$. Решение этого уравнения было получено в примере 25, оно имеет единственное решение 1;1, следовательно, m=2, k=2,n=2 единственное решение исходного уравнения. Исп. БЗ№1,8.

Упражнение 11 Решите в натуральных числах уравнение $2^a + 3^b = 5^c$.

Ответ: a=1; b= 1; c 1 и a 4;=2; c=2.

Пример 27. Решите в целых числах уравнение $m \cdot n^2 = 10^5 \cdot n + m$.

Решение. 1) *Преобразуем* уравнение к виду $m(n^2 - 1) = 10^5 \cdot n$. 2) Рассмотрим *частный случай*: при m=0 получаем n=0, т.е. (0,0) – решение уравнения. 3) Проанализируем *свойства* уравнения: если пара (m;n) является решением, то пара (-m;-n) – тоже. Уравнение чётно по совокупности переменных. Ограничимся рассмотрением положительных m,n. Пары с разными знаками m,n невозможны. 4) $m > 0, n > 0 \Rightarrow n \neq 1 \Rightarrow n \geq 2, m > 0$. 5) Так как левая часть уравнения $m(n-1)(n+1) = 10^5 \cdot n$ делится на n, но ни одна из скобок на n не делится, то $m \vdots n \Rightarrow m = p \cdot n,\ n \in N$. 6) Уравнение принимает вид: $pn(n-1)(n+1) = 10^5 \cdot n \Leftrightarrow p(n-1)(n+1) = 10^5$. 7) Если n чётное, то $(n-1)(n+1)$ два подряд идущих нечётных числа, но среди делителей $10^5 = 2^5 5^5$ нет двух подряд идущих нечётных чисел. Итак, n -нечётное число. 8) Так как $10^5 = 2^5 5^5$ имеет 36 делителей, то диофантово уравнение п.6 равносильно совокупности 36 систем, они имеют два решения: n=3, p=12500,тогда m=pn=37500; n=9, p=1250,тогда m=pn=11250. 9)В силу чётности уравнения решениями будут и пары n=-3; m=-37500; n=-9; m=-11250. **Ответ**: (0,0), (3,37500), (-3,-37500), (9,11250), (-9,-11250). Замечание. В пункте 8можно было сделать перебор по n, заметив, что необходимо, чтобы $n\in\{3;5;7;...143\}$, т.к. при $n\geq 145$получаем p<5, что невозможно. Использованы БЗ№1,2,5.

Пример 28. Найдите все натуральные числа, являющиеся степенью двойки, такие, что после зачёркивания первой цифры слева в их десятичной записи снова получается десятичная запись числа, являющегося степенью двойки.

Решение. 1) Проведём численный эксперимент: рассмотрим несколько первых степеней двойки: 1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024,... и проверим, для каких из чисел выполнено требование задачи. Обнаружили 32 и 64, но есть ли ещё? 2)От эксперимента перейдём к моделированию. Зачёркивание первой цифры можно моделировать так: 32-3*10=2; 64-6*10=4. 3)Пусть степень двойки является (k+1)-значным числом с первой слева цифрой p, тогда модель задачи выглядит так:$2^a-p\cdot 10^k=2^b, a>b;$ или так: $2^a-2^b=p\cdot 10^k, a>b;$преобразуем: $2^b(2^{a-b}-1)=p\cdot 10^k$.Правая часть уравнения делится на 5, следовательно, скобка в левой части делится на 5. Возникла проблема: при каких натуральных n $(2^n-1)\vdots 5$? 4)Для решения проблемы докажем **лемму**: $(2^n-1)\vdots 5$только при n=4m. Для доказательства будем рассуждать по модулю 4, рассматривая остатки при делении на 4. При n=4m $2^n-1=16^m-1=(16-1)(16^{m-1}+16^{m-2}+...+1)\vdots 5$.Была использована формула сокращённого умножения: разность m-ых степеней. Другой способ использует бином Ньютона: $(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}\cdot b+C_n^{2}a^{n-2}\cdot b^2+...+C_n^{n-1}a^1\cdot b^{n-1}+b^n$. Если a=15, b=1, то в разложении по биному степени$(15+1)^m$ получим, что все слагаемые, кроме последнего, кратны 15, поэтому можно записать: $2^n-1=16^m-1=(15+1)^m-1=(15a+1)-1=15a\vdots 5$. Пусть n=4m+1, тогда $2^n-1=2\cdot 16^m-1=2(15a+1)-1=30a+1$ не делится на 5. При n=4m+2 $2^n-1=4\cdot 16^m-1=4(15+1)^m-1=4(15a+1)-1=60a+3$не делится на 5. При n=4m+3 $2^n-1=8\cdot 16^m-1=8(15+1)^m-1=8(15a+1)--1=120a+7$не делится на 5. Лемма доказана. Найденные числа 32 и 64 соответствуют m=1. 5)Покажем, что при m>1 решений нет. $2^b(2^{a-b}-1)=p\cdot 10^k\Leftrightarrow 2^b(2^{4m}-1)=p\cdot 10^k\Leftrightarrow 2^b(2^{2m}-1)(2^{2m}+1)=p\cdot 10^k$,причём $(2^{4m}-1)$делится на 5, т.к.правая часть уравнения делится на 5. Один из множителей $(2^{2m}-1)(2^{2m}+1)$делится на 5, а другой нет, ни одна из скобок не делится на два. При $m\ge 2 \Rightarrow (2^{2m}-1)\ge 15; (2^{2m}+1)\ge 17;$ но, поскольку они поочерёдно равны p. а p<10, получено противоречие. Следовательно, при m>1решений нет. Использованы БЗ№1,8.

Ответ: 32 и 64.

Пример 29. Решите в целых числах уравнение$13y+90x=481$.

Решение. Разделим на меньший коэффициент обе части уравнения: $y=37-7x+\frac{x}{13}$.Необходимо, чтобы последнее слагаемое было целым, $\frac{x}{13}\in Z \Leftrightarrow x=13k, k\in Z$, в частности, при k =1 x =13, +y=-53. Зная частные решения, используя теорему об общем виде решения, получим общее решение уравнения: $x=13+13k; y=-53-90k; k\in Z$. Использована БЗ№1.

Пример 30. Решите в целых числах уравнение$2014^x-2013^x=y^2$.

Решение. При x=0 y=0. При x<0 левая часть уравнения отрицательна, а правая положительна, решений нет. При x=1 y=1 или y=-1. При x>1 уравнение запишем в виде$(4n+2)^x-(4n+1)^x=y^2$, используя бином Ньютона, уравнение приведём к виду$4a-(4b+1)=y^2 \Leftrightarrow 4(a-b)-1=y^2$, что невозможно (см. пример 5).

Ответ: (0,0), (1.1), (1,-1).

Пример 31. Саша и Маша независимо друг от друга составили по одному семизначному числу, используя все цифры 1,2,3,4,5,6,7 по одному разу. Оказалось, что одно число больше другого. Верно ли, что большее число не делится на меньшее?

Решение. Предположим противное: $x \vdots y$, возможные значения частного$\frac{x}{y}\in\{2;3;4;5;6;7;8\}$; 1 и 9 невозможны: в первом случае x=y противоречит условию, во втором случае 9*y =9*1234567=11111103– восьмизначное число, противоречие. Эвристическая подсказка: в задачах на делимость переходим к остаткам. Осталось выбрать модуль: остатки при делении на *какое* число стоит рассмотреть? Семизначных чисел много 7!, столько, сколько существует перестановок семи цифр, перебор велик. Попробуем найти инвариант, т.е. величину, не зависящую от перестановки цифр. Из признаков делимости на 3, на 9 известно, что сумма цифр числа является важным инвариантом. И в нашей ситуации сумма цифр неизменна во всех семизначных числах: 1+2+3+4+5+6+7=28. В качестве модуля выбираем число 9. Заметим, что 28=1(mod9). Возьмём число у, будем умножать его поочерёдно на 2,3,4,5,6,7,8 и вычислять остатки при делении суммы цифр на 9. Эти остатки образуют ряд: 2;3;4;5;6;7;8, действительно, 56=2(mod9); 84=3(mod9); 112=4(mod9); 140=5(mod9); 168=6(mod9); 196=7(mod9); 224=8(mod9); ни разу не получили остатка 1, а ведь это инвариант! Значит, ни разу не получили числа из рассматриваемой совокупности семизначных чисел, полученных в результате перестановки цифр. Ответ: верно. Исп. Б.З. 1.2.

Пример 32. Решите систему уравнений в натуральных числах k,l,m,n $\begin{cases} nm+kl=13 \\ nk-ml=6. \end{cases}$

Решение. Возводя уравнения в квадрат и складывая их, получим $(m^2+k^2)\cdot(n^2+l^2)=5\cdot 41$. Так как множители в правой части – простые числа, уравнение равносильно совокупности двух систем $\begin{cases} m^2+k^2=5 \\ n^2+l^2=41 \text{:èëè} \end{cases} \begin{cases} m^2+k^2=41 \\ n^2+l^2=5. \end{cases}$

Осуществляя перебор и сделав проверку, приходим к ответу: (2;4;1;5); (5;1;4;2).

Пример 33. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 42 и имеют ровно 42 различных натуральных делителя, включая единицу и само число.

Решение. Искомое число ищем в виде $N=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots p_k^{\alpha_k}$, где основания степени – простые числа, показатели степени положительные, целые числа. Число делителей $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\ldots(\alpha_k+1)=42$ по условию. Поскольку 42=2*3*7, то последнее уравнение примет вид $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)=42$, т.е. в каноническом разложении числа N только три различных простых основания, а т.к. N делится на 42, то эти простые основания есть 2,3,7. $\text{Çíà÷èò}\quad N=2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 7^{\alpha_3}$. Число перестановок из трёх элементов $\{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3\}$ равно 6, то рассмотрим 6 случаев, для удобства расположим их таблице.

α_1+1	α_2+1	α_3+1	N
2	3	7	$2^1\cdot 3^2\cdot 7^6$
2	7	3	$2^1\cdot 3^6\cdot 7^2$
3	2	7	$2^2\cdot 3^1\cdot 7^6$
3	7	2	$2^2\cdot 3^6\cdot 7^1$

В правой колонке таблицы записан ответ

Заключение

В статье даны элементы инновационной образовательной технологии в применении к числовой линии школьного курса математики.

Образовательная технология проектирования построения и применения многоуровневой системы задач (МСЗ) и адекватных им специальных и универсальных учебных действий содержит несколько этапов:

- выделение уровней внешней дифференциации и подуровней внутренней дифференциации; составление перечня базовых задач темы (содержащих в себе основные идеи теории и методы);

- построение матричной модели МСЗ (отражающей предметную и деятельностную компоненты системы) и заполнение матрицы конкретными задачами темы,

- построение учебного процесса (введение нового материала, организация фронтальной и индивидуальной работы, проверочные, зачётные, контрольные работы, задания развивающие и углубляющие тему; организация индивидуальной траектории, мониторинг, прогнозирование) на основе МСЗ.

Сформулированные базовые задачи и адекватные им действия (специальные и универсальные) являются фундаментальным ядром выбранного раздела программы. А применяемая для этого технология является средством фундаментализации содержания общего математического образования.

Выделение фундаментального ядра в содержании среднего математического образования: основных понятий, идей, теории базовых задач (содержащих всё это в концентрированном виде) и адекватных им специальных и общих учебных действий позволит построить процедуру оценки сформированности учебных действий в рамках ФГОС-2.

Показано, что образовательная технология является инструментом проектирования, формирования, а в перспективе и средством измерения степени сформированности специальных и универсальных учебных действий.

ЛИТЕРАТУРА

1 Максютин, А.А. Многоуровневая система учебных задач: проектирование и применение / А.А.Максютин // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – Специальный выпуск «Актуальные проблемы гуманитарных исследований». – Т.1. – 2006. – С. 209-219.

2. Максютин, А.А. Задачный подход к обучению математике и его реализация в условиях ЕГЭ / Г.А.Клековкин, А.А.Максютин // Образование и наука. Известия УрО РАО. – Приложение №2 (6), февраль 2007.- С. 135-144.

3. Максютин А.А. Математика-10. Индивидуальные домашние задания по алгебре, началам анализа и геометрии для учащихся 10-х классов. – Самара, 2002.- 588 с.

4. Максютин А.А. Математика. Дидактические материалы для подготовки к ЕГЭ.- Корпорация «Фёдоров».- Самара, 2002.- 64 с.

5. Максютин А.А. Фундаментальное ядро общего математического образования. Разработка концепции предметной области «Математика// Интеграция математической и методической подготовки студентов в педвузе. – Сборник научных трудов. - Вып.2 – 2010. – С. 82-88.

Оглавление

Государственное образовательное учреждение дополнительного
профессионального образования (повышения квалификации)
специалистов
Самарский областной институт повышения квалификации и
переподготовки работников образования

Подписано в печать 01.02.2011 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$ д.л.
Объем 8,6 п.л. Тираж 2000 экз. Печать оперативная.
Заказ № 630

Отпечатано в типографии ГОУ СИПКРО

443111, г. Самара, Московское шоссе, д.125-А.